



Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Facultad de Ciencias

Instituto de Investigación en Comunicación Óptica

Estudio y análisis de escala en sistemas caóticos e hipercaóticos

Tesis

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias Aplicadas

Presenta:

I. E. Luis Eduardo Reyes López

San Luis Potosí

Febrero 2019



Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Facultad de Ciencias

Instituto de Investigación en Comunicación Óptica

Estudio y análisis de escala en sistemas caóticos e hipercaóticos

Tesis

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias Aplicadas

Presenta:

I. E. Luis Eduardo Reyes López

Asesores:

Dr. José Salomé Murguía Ibarra

Dr. Hernán González Aguilar

San Luis Potosí

Febrero 2019



Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Facultad de Ciencias
Instituto de Investigación en Comunicación Óptica

Estudio y análisis de escala en sistemas caóticos e hipercaóticos

I. E. Luis Eduardo Reyes López

Sinodales:

Dr. José Salomé Murguía Ibarra (Asesor)

Dr. Hernán González Aguilar (Asesor)

Dra. Marcela Mejía Carlos

Dr. Raúl Eduardo Balderas Navarro

Dedicatoria

*A mi tía Ana María, por ser una
fuente de inspiración a lo largo
de toda mi vida.*

Agradecimientos

Especialmente a mi madre Verónica por inculcarme el valor a superarme y alcanzar todas mis metas, te quiero mucho mamá.

A mis asesores, el Dr. José Salomé Murguía Ibarra y al Dr. Hernán González Aguilar por su paciencia, así como los consejos y asesorías que me brindaron para poder culminar satisfactoriamente este trabajo.

Al CONACyT, por la beca que me otorgó para realizar mis estudios de maestría.

A los doctores Marcela Mejía Carlos, Raúl Balderas Navarro y José Manuel Flores Camacho, por su constante ayuda y enseñanzas.

A mis heroínas Ventura, Leticia, Adriana y Patricia. Ya que sin su aliento, apoyo y consejos nada de esto hubiera sido posible.

A los hermanos que nunca tuve, mis primos Guillermo, Alejandro, Emiliano, Paola y Fernanda. Por seguirme impulsando a cumplir mis metas. Ustedes son parte importante de esto.

A ti, Elizabeth por darme ánimos en los momentos más difíciles. Pero sobre todo por el constante apoyo que me brindaste.

A mis entrañables amigos: Carlos, Ulises, Alan, Omar, Fernando, Jasiel, Miguel y Chipi. Por soportarme en los peores momentos en los cuales parecía imposible la culminación de este trabajo. Pero sobre todo gracias por su paciencia y consejos.

A mis compañeros del IICO: Ulises, Jasiel, Finees, Luz, Karla, Sandra, Pablo, Agustín, Balta, Vertiz, Juan y Santiago. Gracias por hacer aún más placentero el tiempo que pasábamos en el instituto.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	1
2. TRANSFORMADA WAVELET	4
2.1. Preliminares matemáticos	4
2.2. Transformada wavelet	5
2.2.1. Análisis de escala	9
3. SISTEMAS CAÓTICOS E HIPERCAÓTICOS	11
3.1. Sistemas caóticos e hipercaóticos	11
3.1.1. Sistema dinámico de Chen	11
3.1.2. Sistema dinámico de Chua	12
3.1.3. Sistema dinámico de Lorenz	13
3.1.4. Sistema dinámico de Rössler	14
3.2. Simulaciones numéricas	15
3.2.1. Sistema de Chen	16
3.2.2. Sistema de Chua	18
3.2.3. Sistema de Lorenz	21
3.2.4. Sistema de Rössler	23
4. ANÁLISIS DE ENERGÍA A LAS SERIES TEMPORALES	26
4.1. Sistema de Chen	26
4.2. Sistema de Chua	28
4.3. Sistema de Lorenz	30
4.4. Sistema de Rössler	32
5. ANÁLISIS DE ESCALA A LAS SERIES TEMPORALES	35
5.1. Sistema de Chen	36
5.2. Sistema de Chua	39
5.3. Sistema de Lorenz	42
5.4. Sistema de Rössler	45

6. CONCLUSIONES	49
A. CÁLCULO FRACCIONAL	52
A.1. Funciones especiales	52
A.2. El operador integro-diferencial	52
A.3. Definición de la integral y derivada fraccional de Grünwald-Letnikov .	53
B. EXPONENTES DE LYAPUNOV	55
B.1. Introducción	55
B.2. Cálculo de exponentes de Lyapunov	55
B.3. Dimensión de Lyapunov	56
BIBLIOGRAFÍA	58

Índice de figuras

2.1. Estructura de tres niveles de la transformada wavelet como banco de filtros.	7
2.2. Representación de la descomposición de una secuencia $x[n] \in V_j$ como una versión de promedios y detalles.	8
3.1. Proyecciones del sistema caótico de Chen (a) $x - y$, (c) $x - z$. Series temporales de los estados (b) x , (d) y y (e) z	16
3.2. Proyecciones del sistema fraccionario de Chen (a) $x - y$, (c) $x - z$. Series temporales de los estados (b) x , (d) y y (e) z	17
3.3. Proyecciones del sistema hipercaótico de Chen (a) $x - y$, (b) $y - z$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y , (e) z y (f) w	18
3.4. Proyecciones del sistema caótico de Chua (a) $x - y$, (b) $x - z$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y y (e) z	19
3.5. Proyecciones del sistema caótico fraccional de Chua (a) $x - y$, (b) $x - z$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y y (e) z	20
3.6. Proyecciones del sistema hipercaótico de Chua (a) $x - y$, (b) $x - z$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y , (e) z y (f) w	20
3.7. Proyecciones del sistema caótico de Lorenz (a) $x - y$, (b) $x - z$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y y (e) z	21
3.8. Proyecciones del sistema caótico fraccional de Lorenz (a) $x - y$, (b) $x - z$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y y (e) z	22
3.9. Proyecciones del sistema hipercaótico de Lorenz (a) $x - y$, (b) $x - z$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y , (e) z y (f) w	23
3.10. Proyecciones del sistema caótico de Rössler (a) $x - y$, (b) $z - y$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y y (e) z	24
3.11. Proyecciones del sistema caótico fraccional de Rössler (a) $x - y$, (b) $z - y$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y y (e) z	25
3.12. Proyecciones del sistema hipercaótico de Rossler (a) $y - x$, (b) $x - z$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y , (e) z y (f) w	25

4.1. Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema caótico de Chen.	27
4.2. Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema caótico fraccionario de Chen.	27
4.3. Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema hipercaótico de Chen.	28
4.4. Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema caótico de Chua.	29
4.5. Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema caótico fraccionario de Chua.	29
4.6. Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema hipercaótico de Chua.	30
4.7. Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema caótico de Lorenz.	31
4.8. Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema caótico fraccionario de Lorenz.	31
4.9. Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema hipercaótico de Lorenz.	32
4.10. Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema caótico de Rössler.	33
4.11. Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema caótico fraccionario de Rössler.	33
4.12. Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema hipercaótico de Rössler.	34
5.1. Resultados del análisis de escala del sistema caótico de Chen.	37
5.2. Resultados del análisis de escala del sistema caótico fraccionario de Chen.	38
5.3. Resultados del análisis de escala del sistema hipercaótico de Chen.	39
5.4. Resultados del análisis de escala del sistema caótico de Chua.	40
5.5. Resultados del análisis de escala del sistema caótico fraccionario de Chua.	41
5.6. Resultados del análisis de escala del sistema hipercaótico de Chua.	42

5.7. Resultados del análisis de escala del sistema caótico de Lorenz.	43
5.8. Resultados del análisis de escala del sistema caótico fraccionario de Lorenz.	44
5.9. Resultados del análisis de escala del sistema hipercaótico de Lorenz. .	45
5.10 Resultados del análisis de escala del sistema caótico de Rössler.	46
5.11 Resultados del análisis de escala del sistema caótico fraccionario de Rössler.	47
5.12 Resultados del análisis de escala del sistema hipercaótico de Rössler.	48
B.1. Separación entre dos trayectorias cercanas de un sistema dinámico. .	56

INTRODUCCIÓN

Los sistemas que presentan dinámica hipercaótica han atraído la atención de científicos e ingenieros, debido a la variedad de aplicaciones en las cuales pueden utilizarse [1], de hecho estos sistemas han sido de interés desde el origen del sistema hipercaótico de Rössler [2]. Un sistema dinámico que presenta dinámica caótica no tiene más de un exponente de Lyapunov positivo, sin embargo un sistema hipercaótico posee al menos dos exponentes de Lyapunov positivos [2], que se refleja en su dinámica más compleja, y sus abundantes comportamientos que hacen su implementación sea útil para diferentes aplicaciones incluyendo algoritmos de cifrado [3], algoritmos de búsqueda [4], comunicaciones seguras [5], etc. Además, los sistemas hipercaóticos han sido útiles en aplicaciones de láseres [6] y comunicaciones ópticas [7] debido a sus altas características de seguridad, capacidad y eficiencia, entre otras.

La teoría del cálculo diferencial fraccional tuvo sus inicios en el siglo XVII, pero en los últimos 10 años se ha aplicado en problemas de física e ingeniería [8]. Se encontró que en muchos sistemas interdisciplinarios podrían describirse mediante las ecuaciones diferenciales fraccionarias, tales como los sistemas viscoelásticos [9], polarización dieléctrica [10], polarización electrodo-electrolito [11], ondas electromagnéticas [12], etc. Recientemente, la investigación se ha centrado en la dinámica y el control de los sistemas dinámicos de orden fraccional para ciertas aplicaciones [13].

Existen diferencias esenciales entre los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) y los sistemas diferenciales de orden fraccional. La mayoría de las propiedades de los sistemas ODE no pueden extenderse a los de los sistemas diferenciales de orden fraccional. Aunado a lo anterior, los sistemas de orden

fraccional han captado cada vez más la atención de las personas, debido a que estos sistemas también pueden llegar a presentar dinámica caótica [14].

Por otra parte, con la finalidad de caracterizar tales sistemas se hace énfasis en los estados de los sistemas dinámicos, los cuales se representan como series temporales (ST), las cuales ofrecen información útil para el análisis e interpretación del sistema que las generó. A pesar de que existen una gran variedad de herramientas matemáticas para analizar las ST, la *transformada wavelet* (TW) ha resultado ser una herramienta muy apropiada para analizarlas y procesarlas [15].

La TW se ha desarrollado para estudiar una clase más grande de fenómenos tales como procesado de imágenes, compresión de datos, caos, fractales, entre otros. A diferencia de la *transformada de Fourier*, las funciones base de la TW tienen la característica de localización en el tiempo (o espacio) y en frecuencia. De hecho, se puede decir que la TW trabaja como un microscopio matemático en partes específicas de la señal para extraer estructuras locales y singularidades [15], además la TW se puede utilizar para auxiliar en la caracterización de señales estacionarias y/o no-estacionarias. Debido a lo anterior, la TW resulta ser una herramienta que puede ayudar en el análisis o a describir la dinámica que presentan las ST provenientes de sistemas dinámicos que presentan dinámica caótica o hipercaótica.

El objetivo de esta tesis es el estudio y análisis de las series temporales que provienen de sistemas que presentan dinámica caótica o hipercaótica. En particular se realizó el análisis de energía y el de escala en términos de la TW. El análisis de energía auxilia en conocer la distribución de la energía en los diferentes niveles de descomposición. El análisis de escala se fundamenta en el comportamiento de la varianza de los coeficientes wavelet para señales de carácter auto-similar, o bien de señales que presentan características no-estacionarias. Con base a lo anterior, se contempla establecer una caracterización de los sistemas analizados y por ende auxiliar en la selección de tales sistemas para las respectivas aplicaciones. Además, uno de los principales motivos para realizar este trabajo se debió a que en [16] presentaron un comportamiento del tipo fractal en el cuarto estado del sistema hipercaótico de Chen, tal situación no se había observado en sistemas que presentan dinámica caótica. Por lo que resulta de interés poder establecer que tipo de sistemas con dinámica caótica o hipercaótica presentan comportamientos similares, o bien difieren de ellos.

La estructura del presente trabajo es la siguiente: en el capítulo 2 se presenta un esquema de la *transformada wavelet* en su forma continua y versión discreta en función del análisis multi-resolución. En el capítulo 3 se presentan y describen los sistemas de Chen, Chua, Lorenz y Rössler en sus versiones caótica, caótica fraccional e hipercaótica que se emplearon para su simulación numérica. Mientras que en el capítulo 4 se muestra el análisis de energía para conocer la distribución de energía en los diferentes niveles de descomposición, y por ende tener información adicional de las series temporales a analizar. En el capítulo 5 se muestra el análisis y su posterior caracterización de las ST generadas; en estos dos últimos capítulos se puede observar la flexibilidad y utilidad de la TW al realizar el análisis de energía y de escala basado en wavelets. Tales análisis auxilian a diferenciar el comportamiento que presentan las series temporales. Además, en el capítulo 6 se presentan las diversas conclusiones a las cuales se llegaron a partir del análisis de energía y de escala en función de la transformada wavelet. Finalmente, se tiene el apéndice A que explica de una forma más detallada la teoría del cálculo fraccional y el apéndice B explica la forma de calcular los exponentes de Lyapunov, y el procedimiento para obtener la dimensión fractal en función de los exponentes de Lyapunov.

TRANSFORMADA WAVELET

En este capítulo se describe la notación matemática y definiciones que se requieren para representar la principal herramienta de este trabajo, la Transformada wavelet (TW). La TW es una herramienta matemática que en los últimos años ha tenido un gran auge e impacto en el área del procesamiento digital de señales, ya que ha demostrado ser muy útil y flexible en el análisis de señales no lineales y no estacionarias.

2.1 Preliminares matemáticos

Como es usual, denotaremos por \mathbb{R} al conjunto de los números reales y por \mathbb{Z} al conjunto de los números enteros. Una señal f evaluada en el tiempo continuo se denota como $f(t)$, donde t es un número real. De manera similar, para el caso discreto, la función f evaluada en un número entero ($n \in \mathbb{Z}$), será denotada como $f[n]$. Por lo que llamaremos a $f(t)$ y a $f[n]$ funciones continua y discreta, respectivamente.

Por otro lado consideramos el espacio vectorial $L^2(\mathbb{R})$ formado por las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$, esto es, el espacio de las funciones reales, de variable real, que son cuadrado integrables. Estas funciones también son conocidas como funciones de *energía finita*.

En $L^2(\mathbb{R})$ se puede definir un producto interior, en este caso consideramos el producto de las funciones $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ dado por $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt$. De manera natural, este producto interior induce una norma en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ dada por $\|f\| = |\langle f, f \rangle|^{1/2}$.

Al considerar el espacio $L^2(\mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\|$, vemos que $L^2(\mathbb{R})$ es un *espacio*

de Hilbert. Al ser $L^2(\mathbb{R})$ un espacio vectorial, podemos hablar de una de sus bases, esta puede ser ortogonal u ortonormal al considerar el producto interior definido. Dado lo anterior, si tenemos que $\{\varphi_k\}$ es una base de $L^2(\mathbb{R})$, cualquier función $f \in L^2(\mathbb{R})$ se puede expresar como

$$f = \sum a_k \varphi_k$$

para algunos coeficientes a_k .

2.2 Transformada wavelet

En algunas ocasiones es necesario utilizar algunas transformaciones para poder hacer un mejor análisis de información, en la actualidad existen varias transformaciones de uso común, por ejemplo, la transformada de Fourier, la transformada de Laplace, la transformada wavelet. En este trabajo nos enfocamos al uso de la última.

La transformada wavelet es muy usada en el análisis de señales al ser consideradas como series de tiempo. A continuación la describimos.

Consideremos una función fija $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Una función $\psi(t)$ se dice que es una función wavelet si su transformada de Fourier $\widehat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)e^{-i\omega t} dt$, satisface

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) es llamada *condición de admisibilidad*, esto implica que la integral de la función wavelet debe de ser igual a cero:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = \widehat{\psi}(0) = 0, \quad (2.2)$$

esto significa que la función wavelet $\psi(t)$ debe de ser de carácter oscilatorio, es decir, la función $\psi(t)$ debe ser una especie de onda.

También es posible definir, mediante escalamientos y traslaciones, una familia de funciones wavelet $\psi_{a,b}(t)$ dadas por:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (2.3)$$

donde $b \in \mathbb{R}$ es un parámetro de traslación, mientras que $a > 0$ es un parámetro de escalamiento. El factor $1/\sqrt{a}$ es la constante de normalización que se usa para que la energía de la señal se preserve para cada uno de los valores de escala a .

Dada una función $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ se define su *transformada wavelet continua* (TWC) como:

$$W_x(a, b) = \langle x, \psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi_{a,b}(t)dt, \quad (2.4)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior en $L^2(\mathbb{R})$.

En los estudios de muchos fenómenos se tiene que hacer una representación de ellos con sólo un número finito de valores, esto hace necesario tener una versión discreta de la TWC (2.4).

Para el estudio de algunos fenómenos se usa un conjunto de funciones wavelet que forman una base ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$. Por ejemplo, podemos considerar la base ortonormal wavelet $\{\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2}\psi(2^m t - n)\}_{m,n}$ donde m y n son conocidos como los índices de dilatación y traslación, respectivamente. Así, cada señal $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$, de energía finita, se puede expresar, en términos de esta base, como

$$x(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n}\psi_{a,b}(t), \quad (2.5)$$

donde los coeficientes están dados por

$$d_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi_{m,n}(t)dt. \quad (2.6)$$

Con el objetivo de poder calcular (2.5), Mallat [15], desarrolló un método basado en el análisis multi-resolución (AMR). Este provee un método general para la construcción de la base ortogonal wavelet y da pauta para la implementación de la transformada rápida wavelet (TRW). Este algoritmo relaciona los coeficientes wavelet y los bancos de filtros. En la descomposición de una señal X se considera una descomposición sucesiva en series de aproximaciones y detalles, donde a la función wavelet $\psi(t)$ se le asocia una función de escala $\varphi(t)$, así como los coeficientes de escala, $a_{m,n}$ [15]. Considerando lo anterior, los coeficientes de escala m pueden ser calculados a partir de los coeficientes de escala del nivel $m+1$ usando las expresiones

$$a_{m,n} = \sum_l h[l - 2n]a_{m+1,l}, \quad (2.7)$$

$$d_{m,l} = \sum_l g[l - 2n]a_{m+1,l}, \quad (2.8)$$

donde $h[n]$ y $g[n]$ son llamados filtros pasa-bajas y pasa-altas, respectivamente. Las ecuaciones (2.7) y (2.8) representan la TWR para calcular (2.6). En sí, los coeficientes $a_{m,n}$ y $d_{m,n}$ corresponden a la operación de la convolución de $a_{m+1,n}$ con los filtros $h[n]$ y $g[n]$, siguiéndole la operación de submuestreo por un factor de 2. De forma inversa, para la reconstrucción de los coeficientes de escala $a_{m+1,n}$, se considera

$$a_{m+1,n} = \sum_l (h[2l-n]a_{m,l} + g[2l-n]d_{m,l}), \quad (2.9)$$

es decir, una combinación lineal de los coeficientes de escala y wavelet en el nivel previo. Lo anterior se puede ver como el resultado de aplicar la operación de convolución discreta en medio de señales no muestreadas $a_{m,l}$ y los filtros $h[n]$ y $g[n]$.

En la figura 2.1, se muestra un banco de filtros en el que se ilustran tres niveles de transformación wavelet, los cuales corresponden al aplicar las ecuaciones (2.7) y (2.8).

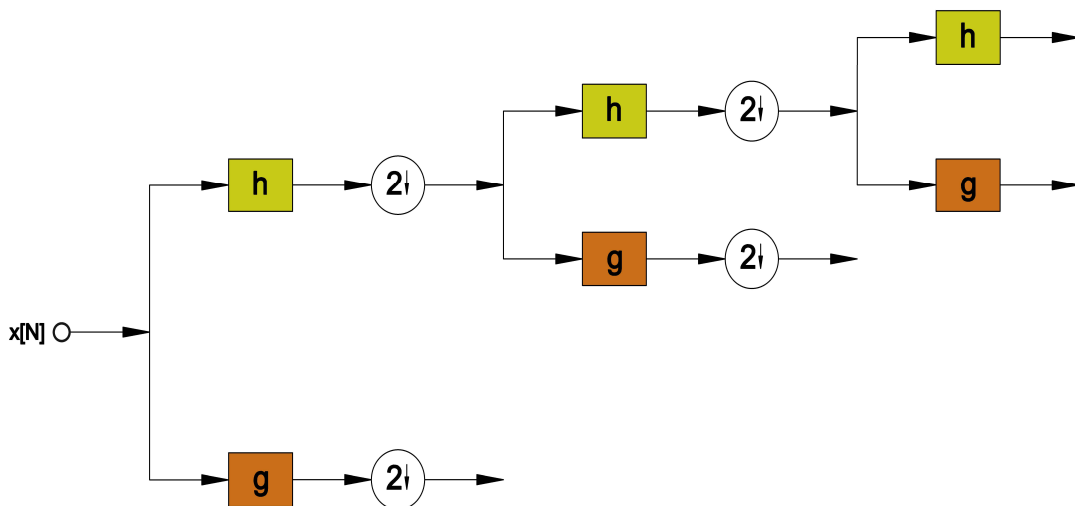


Figura 2.1: Estructura de tres niveles de la transformada wavelet como banco de filtros.

Cabe mencionar que el número de niveles en el algoritmo multi-resolución depende de la longitud de la señal. Cualquier secuencia de energía finita con 2^M muestras se puede descomponer en $M + 1$ niveles, donde al inicio se toma la secuencia $a_{M+1,n} = X = x[1], x[2], \dots, x[N]$, cuya longitud es $N = 2^M$. La primer aplicación de (2.7) y (2.8) definen el primer nivel de la TWR de X y en la

descomposición se van considerando los coeficientes de escala en un nivel inferior. Iterando M veces, las expresiones (2.8) y (2.7), la señal transformada consiste en un conjunto de coeficientes wavelet para los valores de escalamiento $m = 1, \dots, M$ y los coeficientes de escala en el nivel M . De manera general, los coeficientes de escala capturan la tendencia, mientras que los coeficientes wavelet mantienen el patrón de las fluctuaciones de los datos.

Otra forma de bosquejar la descomposición wavelet usando el AMR se puede observar en la figura 2.2. En este caso se considera una secuencia de subespacios cerrados anidados que satisfacen ciertas propiedades, en los cuales los espacios V_j permiten representar la información promedio de la señal (mediante la función de escala), mientras que en los espacios W_j proporcionan el resto de la información (los detalles, mediante la función wavelet).

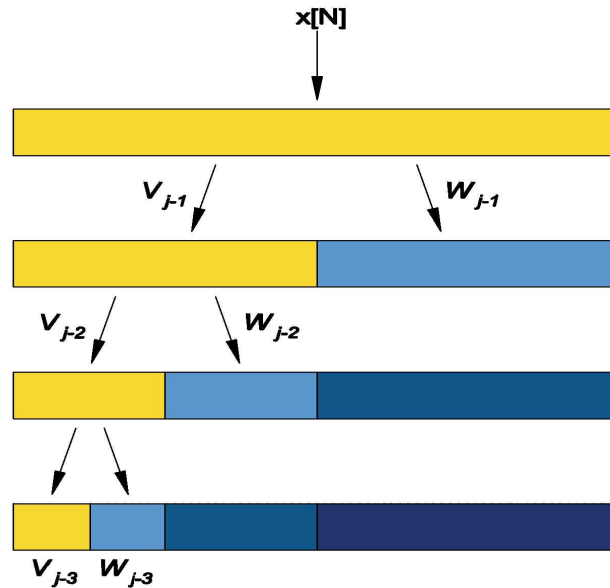


Figura 2.2: Representación de la descomposición de una secuencia $x[n] \in V_j$ como una versión de promedios y detalles.

Una propiedad importante es que la energía total de la señal puede ser expresada como una relación de Parseval en términos de wavelets [17], es decir,

$$\sum_{n=1}^N |x[n]|^2 = \sum_{n=1}^N |a_{M,n}|^2 + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |d_{m,n}|^2, \quad (2.10)$$

donde la energía de la señal puede ser calculada en términos de los diferentes

niveles de resolución correspondiente a la señal transformada.

2.2.1 Análisis de escala

De acuerdo a [18], el espectro de potencia $P(\omega)$ para procesos aleatorios auto-similares, que corresponde a la transformada de Fourier de la función de autocorrelación, presenta el siguiente comportamiento:

$$P(\omega) \sim |\omega|^{-\beta}, \quad (2.11)$$

donde ω corresponde a la frecuencia angular y β es el parámetro espectral. De hecho, el exponente β se relaciona con los procesos aleatorios auto-similares estadísticamente denominados procesos $1/f$ mediante la expresión $\beta = 2H + 1$, donde H es denominado como parámetro de auto-similaridad [18]. Aún mas importante, la varianza de los coeficientes wavelet, $\text{var}\{d_{m,n}\}$, está relacionado con los niveles de descomposición m a través de la siguiente ley de potencia [18, 19, 20]

$$\text{var}\{d_{m,n}\} \approx (2^m)^{-\beta}. \quad (2.12)$$

Con la finalidad de estimar el exponente de escala β se utiliza el ajuste por mínimos cuadrados del siguiente modelo lineal

$$\log_2(\text{var}\{d_{m,n}\}) = -m\beta + (K + v_m), \quad (2.13)$$

donde K y v_m son constantes relacionadas al procedimiento lineal. Este resultado ha sido usado para encontrar niveles dominantes asociado con la señal y por ende tratar de caracterizarla. Por ejemplo, en [18, 20, 21] se realizó el estudio numérico y experimental de las series de tiempo con comportamiento caótico.

- (a) Si en la gráfica del logaritmo de la varianza de los coeficientes wavelet muestra un máximo en un nivel particular de transformación, o bien en un conjunto pequeño de niveles de transformación, implica que tiene una alta concentración de energía, lo cual indica que se tienen estructuras coherentes en tal escala o nivel de transformación, o bien, que la señal se puede reconstruir con solo estos niveles donde la señal este concentrada.
- (b) Si en la gráfica del logaritmo de de la varianza de los coeficientes presenta una recta con pendiente negativa, indica un comportamiento del tipo *fractal* en la serie temporal, y el exponente β (o H) caracteriza la señal [20].

- (c)** Si en la gráfica del logaritmo de la varianza de los coeficientes presenta una recta con pendiente cero, se dice que la señal presenta un comportamiento tipo *ruido Gaussiano* [18]. Lo anterior implica que la energía de la señal se distribuye uniformemente en la mayoría de los niveles de transformación wavelet, lo cual es muy similar a las características del ruido en el espectro de frecuencia.

SISTEMAS CAÓTICOS E HIPERCAÓTICOS

Desde la década de los noventa se ha incrementado el uso de osciladores caóticos e hipercaóticos en diferentes aplicaciones por ejemplo en los sistemas de comunicación, en sistemas de cifrado y otros [22].

En [2], Rössler definió el hipercaos como la dinámica de un atractor caótico que cuenta con *más de un exponente positivo de Lyapunov*, indicando que en su dinámica pueden exhibir una expansión multidimensional.

En este capítulo se presentan los sistemas dinámicos considerados a caracterizar, simulaciones numéricas, se calcularon sus exponentes de Lyapunov para verificar el tipo de dinámica que presentaban, también se calculó la dimensión de Lyapunov respectiva.

3.1 Sistemas caóticos e hipercaóticos

En esta sección se describen los sistemas dinámicos en sus tres versiones: caóticos, caóticos fraccionales e hipercaóticos.

3.1.1 Sistema dinámico de Chen

El sistema de Chen fue presentado en 1999 [23], bajo ciertas condiciones presenta una dinámica caótica. Posteriormente, se introdujo una nueva variable de estado w , la cual se acopló a la segunda ecuación del sistema de Chen, y para ciertos valores en sus parámetros se logra que el nuevo sistema, de cuatro dimensiones, fuera de carácter hipercaótico [24]; en [25] se presenta su versión fraccional.

La dinámica del sistema fraccionario de Chen se describe mediante el siguiente

conjunto de ecuaciones diferenciales [23, 25],

$$\begin{aligned}\frac{d^q x(t)}{dt^q} &= a(y(t) - x(t)), \\ \frac{d^q y(t)}{dt^q} &= (c - a)x(t) - x(t)z(t) + cy(t), \\ \frac{d^q z(t)}{dt^q} &= x(t)y(t) - bz(t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde a , b y c son parámetros del sistema y q ($0 < q \leq 1$) representa el orden de la derivada fraccional, la cual definimos en el apéndice A. Para el valor de $q = 1$ se tiene derivada usual.

En [23] se muestra que cuando $q = 1$ y $(a, b, c) = (36, 3, 28)$, el sistema (3.1) presenta un comportamiento caótico, resultando así en la versión caótica del sistema de Chen. Por otro lado, en [25] se muestra que el sistema (3.1) se encuentra en régimen caótico cuando $q = 0.9$ y $(a, b, c) = (35, 3, 28)$ que corresponde a la versión caótica fraccionaria del sistema de Chen.

En [16] se presenta el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= 36(y(t) - x(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= 28y(t) - x(t)(z(t) - 16) - w(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= x(t)y(t) - 3z(t), \\ \frac{dw(t)}{dt} &= x(t) + 0.5.\end{aligned}\tag{3.2}$$

que corresponde a una versión hipercaótica de (3.1).

3.1.2 Sistema dinámico de Chua

El sistema de Chua es probablemente el sistema más conocido que presenta una dinámica caótica. Este sistema ha sido ampliamente investigado y ha sido considerado como un sistema de ecuaciones lineales autónomas que presenta una gran variedad de comportamientos dinámicos, incluyendo el de caos, resonancia estocástica, etcétera [26].

En [26, 27] se presentan la versión caótica y fraccional del sistema de Chua

mediante un conjunto de tres ecuaciones diferenciales descrito por

$$\begin{aligned}\frac{d^q x(t)}{dt^q} &= \alpha(y(t) - f_1(x)), \\ \frac{d^q y(t)}{dt^q} &= x(t) - y(t) + z(t), \\ \frac{d^q z(t)}{dt^q} &= -\beta y(t) - \gamma z(t),\end{aligned}\tag{3.3}$$

donde α , β , γ son constantes del sistema. La función $f_1(x)$ es de carácter lineal a trozos definida por

$$f_1(x) = m_1 x(t) + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x(t) + 1| - |x(t) - 1|),$$

para algunas constantes m_0 y m_1 .

Como se establece en [26], el sistema (3.3) presentó un comportamiento caótico para los valores de $q = 1$ y $\alpha = 10$, $\beta = 15$, $\gamma = 0.16$, $m_0 = 5/7$, $m_1 = 2/7$. Por otro lado, en [27] se logró que dicho sistema presente un comportamiento caótico fraccional para $q = 0.94$ y los valores $\alpha = 10.19$, $\beta = 10.30$, $\gamma = 0.16$, $m_0 = -1.11$, $m_1 = -0.86$.

Adicionalmente, una versión hipercaótica del sistema (3.3), se describe mediante las ecuaciones [28]

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= 30(y(t) - f_2(x)), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= x(t) - y(t) + z(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -50y(t) - 0.32z(t) + w(t), \\ \frac{dw(t)}{dt} &= -0.5x(t) + y(t)z(t),\end{aligned}\tag{3.4}$$

donde $w(t)$ es una nueva variable de estado y la función $f_2(x) = 0.03x(t) - 1.2x(t)^3$ es no lineal.

3.1.3 Sistema dinámico de Lorenz

En el año de 1963, Lorenz encontró el primer atractor caótico cuando estudiaba la convección atmosférica [29]. Él fue el primero que utilizó el termino *efecto mariposa*, que en teoría del caos significa que el sistema es sensible a las condiciones iniciales [30]. De manera similar al sistema Chua, la versión hipercaótica de este sistema se obtiene al añadir una variable de estado.

El sistema fraccionario de Lorenz se representa mediante el siguiente conjunto de ecuaciones [29, 31]

$$\begin{aligned}\frac{d^q x(t)}{dt^q} &= \sigma(y(t) - x(t)), \\ \frac{d^q y(t)}{dt^q} &= x(t)(\rho - z(t)) - y(t), \\ \frac{d^q z(t)}{dt^q} &= x(t)y(t) - \beta z(t),\end{aligned}\tag{3.5}$$

donde β , σ y ρ son constantes. Los valores de σ y ρ son llamados números de Prandtl y Rayleigh, respectivamente [31].

En [29] se establece que para $q = 1$, $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = 8/3$, el sistema (3.5) se encuentra en régimen caótico, resultando así en la versión caótica del sistema de Lorenz. Posteriormente, en [31] se estableció que si se consideraban los mismos valores de σ , ρ y β que en la versión caótica, pero con $q = 0.993$ el sistema fraccional (3.5) presenta un comportamiento caótico.

En [22] se presenta una versión hipercaótica del sistema de Lorenz, dada por:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= 10(y(t) - x(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= 28x(t) - y(t) - x(t)z(t) + w(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= x(t)y(t) - (8/3)z(t), \\ \frac{dw(t)}{dt} &= -5x(t).\end{aligned}\tag{3.6}$$

3.1.4 Sistema dinámico de Rössler

El sistema de Rössler fue propuesto en el año de 1976. Posteriormente, este sistema fue útil para modelar el equilibrio en reacciones químicas [32]. Adicionalmente, en la referencia [2] se presentó la versión hipercaótica de dicho sistema, en dicha versión se le agregó una variable de estado, la cual presenta contribución explícita en la segunda ecuación del sistema de Rössler. Posteriormente, se presentó la versión caótica fraccional del sistema de Rössler, tal versión consistía en un conjunto de tres ecuaciones diferenciales de orden fraccional [12].

El sistema fraccionario de Rössler está descrito, [32, 12], por las ecuaciones

diferenciales:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^q x(t)}{dt^q} &= -(y(t) + z(t)), \\
 \frac{d^q y(t)}{dt^q} &= x(t) + ay(t), \\
 \frac{d^q z(t)}{dt^q} &= b + z(t)(x(t) - c),
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

donde a , b y c son parámetros del sistema.

En [12] se muestra que cuando $q = 0.9$ y $(a, b, c) = (0.4, 0.2, 5.7)$ el sistema tiene un comportamiento caótico fraccional mientras que en [32] se muestra que para $q = 1$ y $(a, b, c) = (0.2, 0.2, 5.7)$ el sistema tiene un comportamiento caótico.

En [2] se presenta una versión hipercaótica del sistema de Rössler dado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx(t)}{dt} &= -y(t) - z(t), \\
 \frac{dy(t)}{dt} &= x(t) + 0.25y(t) + w(t), \\
 \frac{dz(t)}{dt} &= 3 + x(t)z(t), \\
 \frac{dw(t)}{dt} &= -0.5z(t) + 0.05w(t).
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

3.2 Simulaciones numéricas

En esta sección se presentan las simulaciones numéricas de los sistemas presentados en la sección anterior, así como el cálculo de los valores de los exponentes de Lyapunov de las series temporales de los sistemas, y su respectiva dimensión de Lyapunov. En el apéndice B se describen los conceptos de los exponente y dimensión de Lyapunov, y como estos nos ayudan a caracterizar los sistemas dinámicos.

Para la simulación de los sistemas que presentan dinámica caótica e hipercaótica, se consideró el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Mientras que, para los sistemas caóticos fraccionales, utilizando la definición de Grünwald-Letnikov (ver apéndice A), se consideró la implementación numérica presentada en [30]. Los valores de los exponentes de Lyapunov de los sistemas caóticos e hipercaóticos se calcularon mediante la implementación numérica de [33], y para los sistemas caóticos fraccionales se utilizó el método numérico presentado en [34].

3.2.1 Sistema de Chen

Versión caótica

Se realizaron simulaciones del sistema de Chen (3.1) para los valores $q = 1$, $(a, b, c) = (36, 3, 28)$ y con las condiciones iniciales $x(0) = 0.9134$, $y(0) = 0.1$, $z(0) = 0.1$ y un paso de tiempo $h = 0.001$. En la figura 3.1 se muestran las series temporales resultantes y algunas proyecciones, en ellas se puede observar que las series temporales presentan un comportamiento no periódico y errático, así como la forma de los atractores extraños en las respectivas proyecciones.

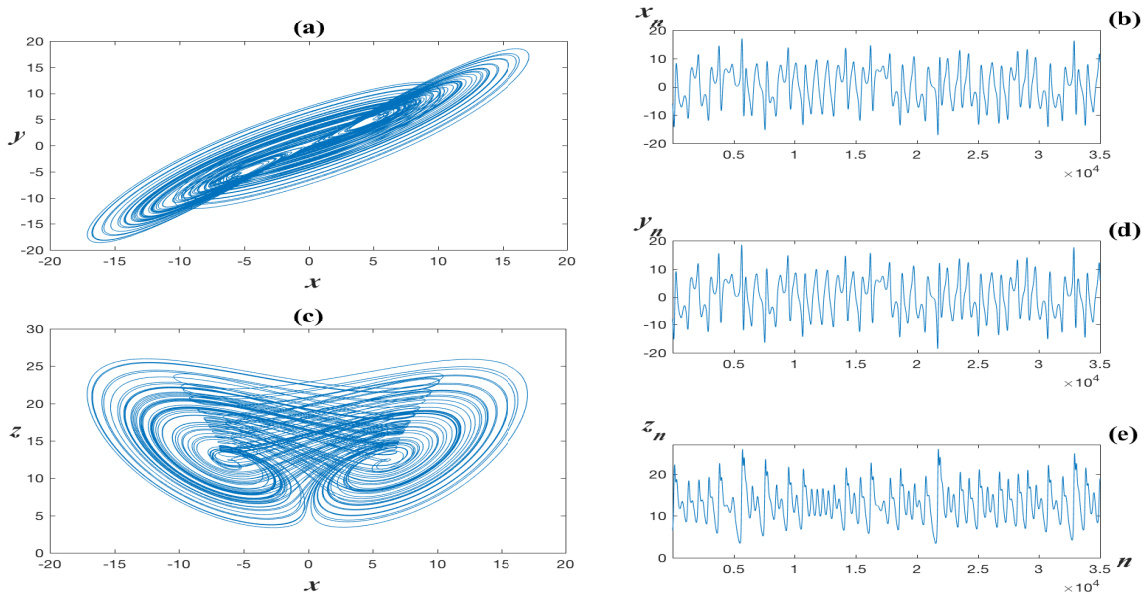


Figura 3.1: Proyecciones del sistema caótico de Chen (a) $x - y$, (c) $x - z$. Series temporales de los estados (b) x , (d) y y (e) z .

Por otro lado, se calcularon los exponentes de Lyapunov del sistema (3.1) los cuales fueron $\lambda_1 \approx 2.46$, $\lambda_2 \approx 0$ y $\lambda_3 \approx -13.42$ de donde concluimos, al ser uno positivo, uno negativo y cero, que presenta una dinámica caótica. Adicionalmente, y en función de los exponentes de Lyapunov, se calculó la dimensión de Lyapunov del sistema: $D_L \approx 2.18$.

Versión fraccional

Las simulaciones del sistema (3.1) se realizaron para los mismos valores a, b, c de la versión caótica, pero con $q = 0.9$ y condiciones iniciales $x(0) = -9, y(0) = -5$ y $z(0) = 14$ y un paso de tiempo de $h = 0.001$. En la figura 3.2 se presentan algunas proyecciones del atractor, así como las series temporales de cada uno de los estados del sistema.

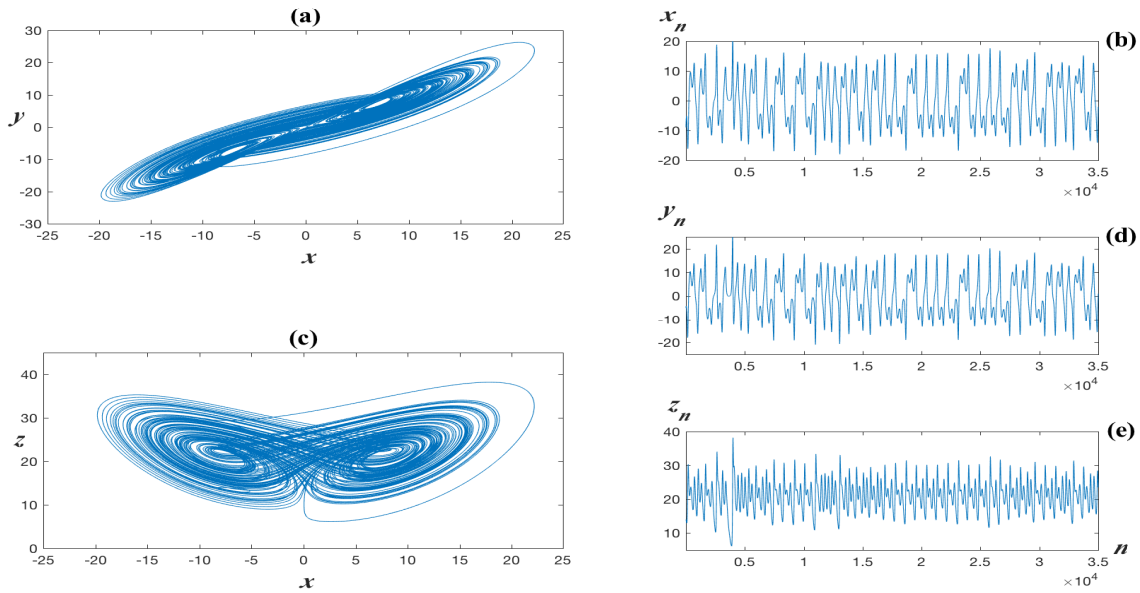


Figura 3.2: Proyecciones del sistema fraccionario de Chen (a) x - y , (c) x - z . Series temporales de los estados (b) x , (d) y y (e) z .

Los exponentes de Lyapunov de este sistema fueron $\lambda_1 \approx 3.77, \lambda_2 \approx 0$ y $\lambda_3 \approx -20.63$, que implica una dinámica caótica. La dimensión de Lyapunov fue de $D_L \approx 2.18$, que es muy similar a la dimensión obtenida en el caso caótico.

Versión hipercaótica

De manera similar a los casos anteriores, en la figura 3.3 se muestran las series temporales resultantes de los estados, y algunas proyecciones del atractor correspondientes a las simulaciones del sistema (3.2). En este caso las condiciones iniciales fueron $x(0) = 1, y(0) = -1, z(0) = 0, w(0) = -0.1$, con un paso de tiempo de $h = 0.001$.

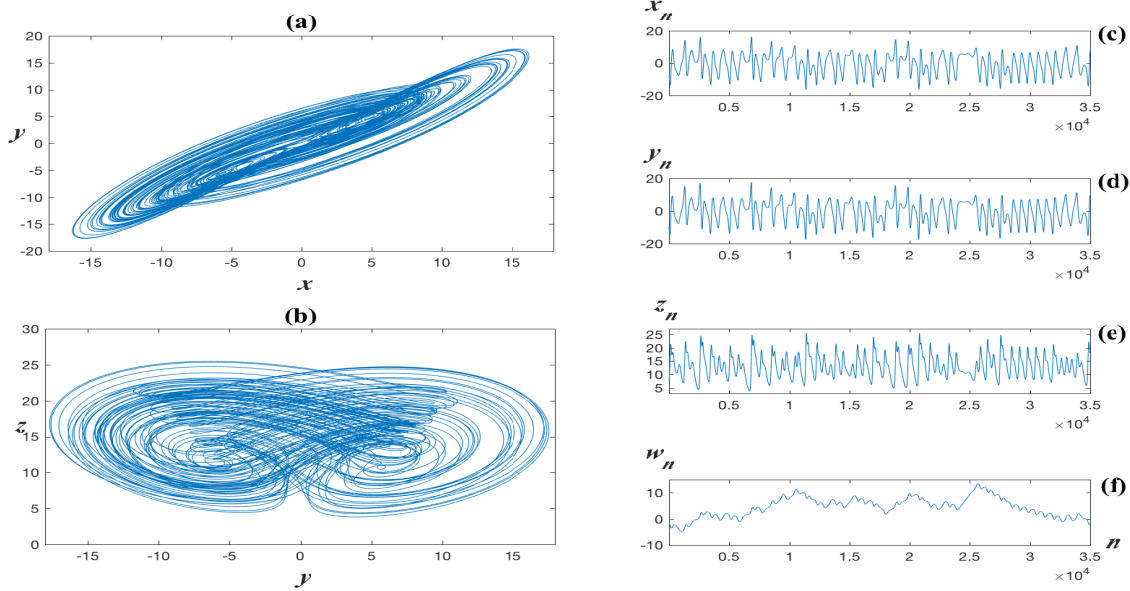


Figura 3.3: Proyecciones del sistema hipercaótico de Chen (a) $x - y$, (b) $y - z$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y , (e) z y (f) w .

Bajo estas condiciones el sistema presentó un comportamiento hipercaótico, debido a que los exponentes de Lyapunov fueron $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \approx (1.39, 1.43, 0, -13.34)$, y están en concordancia en que los exponentes para este tipo de comportamiento deben ser al menos dos positivos [2]. El valor de la dimensión de Lyapunov del sistema fue $D_L \approx 3.21$.

3.2.2 Sistema de Chua

Versión caótica

Se realizaron simulaciones numéricas del sistema de Chua (3.3) para los valores $q = 1$, $\alpha = 10$, $\beta = -15$, $\gamma = 0.16$, $m_0 = 5/7$, $m_1 = 2/7$ y con las condiciones iniciales $(x(0), y(0), z(0)) = (0.6324, 0.0001, -0.0975)$ y un paso de tiempo $h = 0.01$. En la figura 3.4 se muestran las series temporales resultantes y algunas proyecciones del sistema.

Los exponentes de Lyapunov de este sistema fueron $\lambda_1 \approx 0.13$, $\lambda_2 \approx 0$ y $\lambda_3 \approx -10.88$, con lo cual es evidente que el sistema se encuentra en régimen caótico. La dimensión de Lyapunov del sistema fue de $D_L \approx 2.01$.

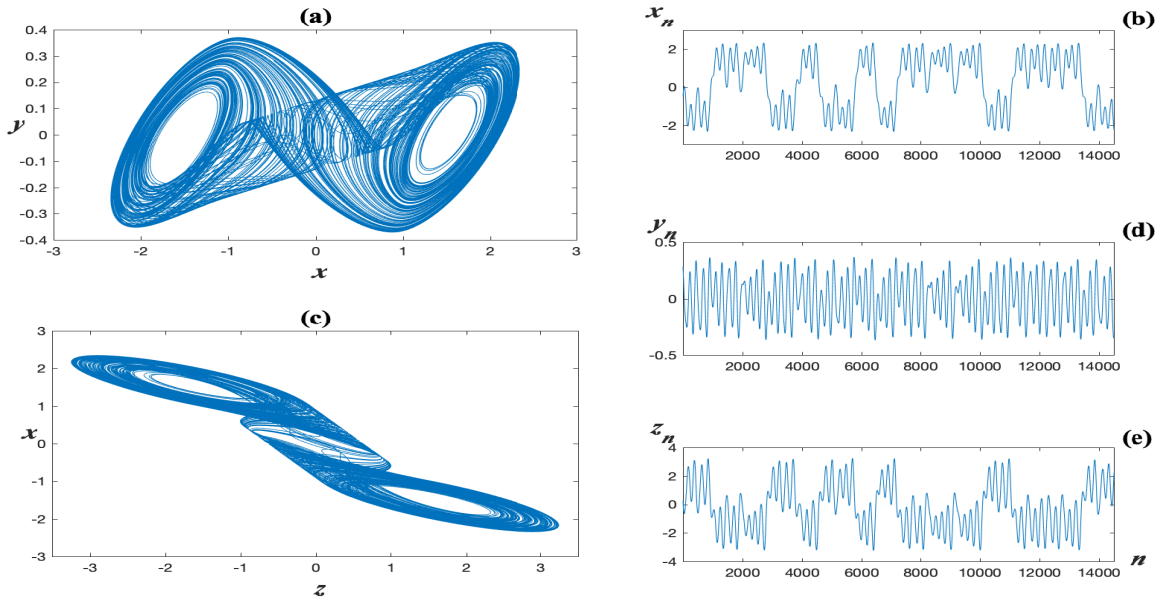


Figura 3.4: Proyecciones del sistema caótico de Chua (a) $x - y$, (b) $x - z$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y y (e) z .

Versión fraccional

Las simulaciones del sistema (3.3) se realizaron con los valores $q = 0.9$, $\alpha = 10.3$, $\beta = 10.7$, $\gamma = 0.2$, $m_0 = -0.8$, $m_1 = -1.7$ y con las condiciones iniciales $(x(0), y(0), z(0)) = (-0.1, 0.1, 0.6)$ y un paso de tiempo $h = 0.005$. En la figura 3.5 se observan algunas proyecciones del sistema, así como las series temporales de cada uno de los estados del sistema.

Por otro lado, los exponentes de Lyapunov del sistema fueron $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \approx (1.18, 0, -13.54)$, lo cual indica que el sistema presenta un comportamiento caótico. La dimensión de Lyapunov fue de $D_L \approx 2.08$, la cual es muy similar a la dimensión obtenida en el caso caótico.

Versión hipercaótica

Asimismo, en la figura 3.6 se muestran las series temporales resultantes de los estados, y algunas proyecciones del sistema (3.4). En este caso las condiciones iniciales fueron $(x(0), y(0), z(0), w(0)) = (0, 0.1, 0.3, 0.4)$ y $h = 0.006$ como paso de tiempo.

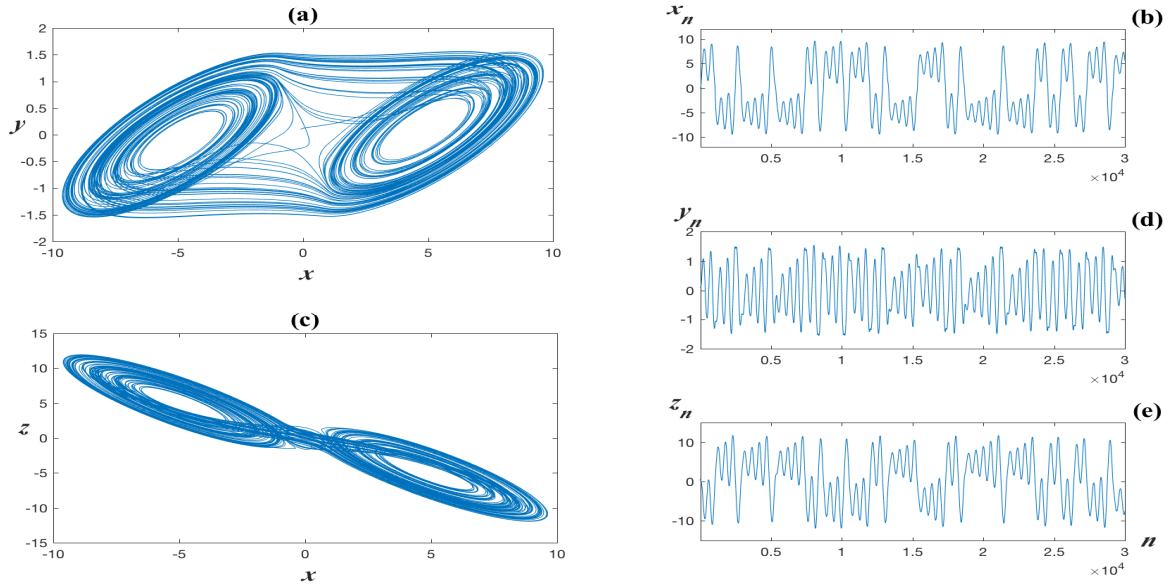


Figura 3.5: Proyecciones del sistema caótico fraccional de Chua (a) $x - y$, (b) $x - z$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y y (e) z .

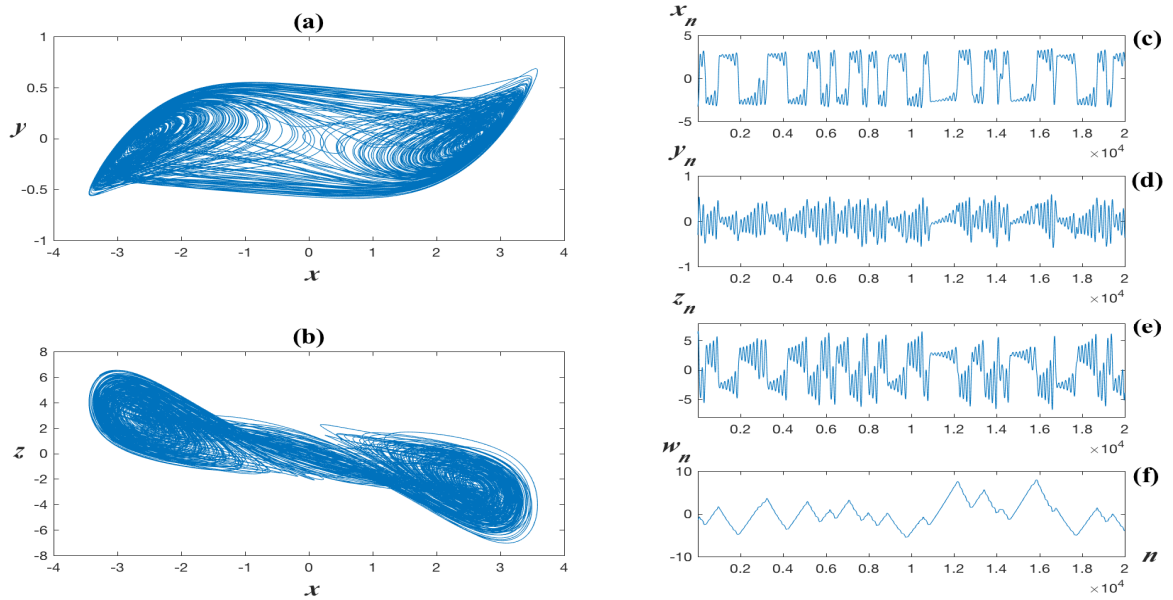


Figura 3.6: Proyecciones del sistema hipercaótico de Chua (a) $x - y$, (b) $x - z$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y , (e) z y (f) w .

Bajo estas condiciones el sistema presentó un comportamiento caótico, debido a que los exponentes de Lyapunov son $\lambda_1 \approx 1.42$, $\lambda_2 \approx 1.11$, $\lambda_3 \approx 0$, $\lambda_4 \approx -4.14$. El valor de la dimensión de Lyapunov para este sistema fue de $D_L \approx 3.61$.

3.2.3 Sistema de Lorenz

Versión caótica

Se realizaron simulaciones del sistema de Lorenz (3.5) para los valores $q = 1$, $(\sigma, \rho, \beta) = (16, 50, 4)$ y con las condiciones iniciales $(x(0), y(0), z(0)) = (0.8491, 0.6123, 0.6311)$ y un paso de tiempo $h = 0.004$. Las series temporales resultantes, así como algunas proyecciones del sistema se ilustran en la figura 3.7.

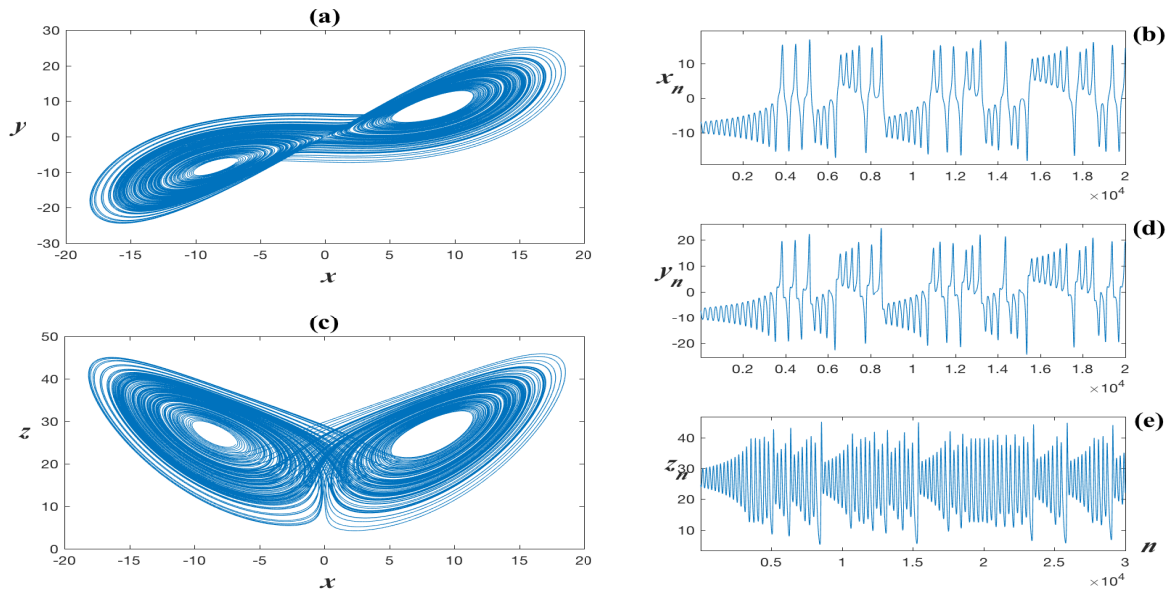


Figura 3.7: Proyecciones del sistema caótico de Lorenz (a) $x - y$, (b) $x - z$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y y (e) z .

Los exponentes de Lyapunov de tal sistema fueron $\lambda_1 \approx 0.87$, $\lambda_2 \approx 0$, $\lambda_3 \approx -14.54$, con lo cual es evidente que el sistema es de carácter caótico. La dimensión de Lyapunov correspondiente al sistema fue de $D_L \approx 2.05$.

Versión fraccional

En la figura 3.8 se muestran algunas proyecciones del atractor, así como las series temporales resultantes del sistema (3.5) cuando $q = 0.995$, $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 28, 8/3)$ y con las condiciones iniciales $(x(0), y(0), z(0)) = (0.1, 0.1, 0.1)$ y un paso de tiempo $h = 0.005$

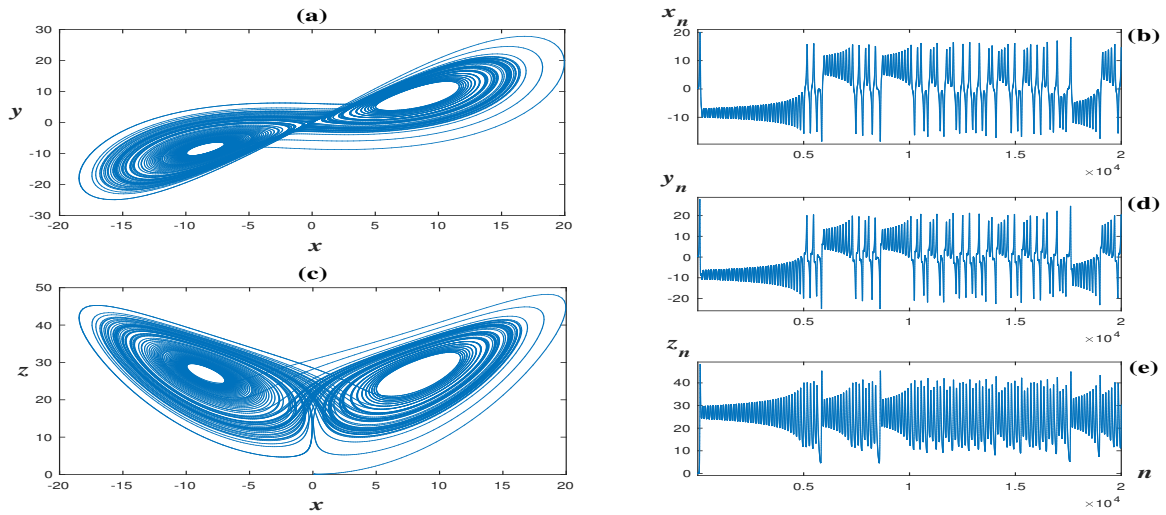


Figura 3.8: Proyecciones del sistema caótico fraccional de Lorenz (a) $x - y$, (b) $x - z$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y y (e) z .

Por otro lado, los exponentes de Lyapunov $\lambda_1 \approx 0.99$, $\lambda_2 \approx 0$ y $\lambda_3 \approx -15.70$, con tales valores se confirma que el sistema se encuentra en régimen caótico. La dimensión tuvo un valor de $D_L \approx 2.06$, el cual es muy similar a la obtenida en la versión caótica.

Versión hipercaótica

De manera similar a los casos anteriores, en la figura 3.9 se muestran las series temporales resultantes de los estados, y algunas proyecciones del sistema (3.6). En este caso las condiciones iniciales fueron $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, $z(0) = 0.1$ y $w(0) = -0.1$, y un paso de tiempo $h = 0.004$.

Los exponentes de Lyapunov correspondientes al sistema son $\lambda_1 \approx 0.38$, $\lambda_2 \approx 0.41$, $\lambda_3 \approx 0$ y $\lambda_4 \approx -14.37$. De acuerdo a los exponentes, el sistema presenta una dinámica

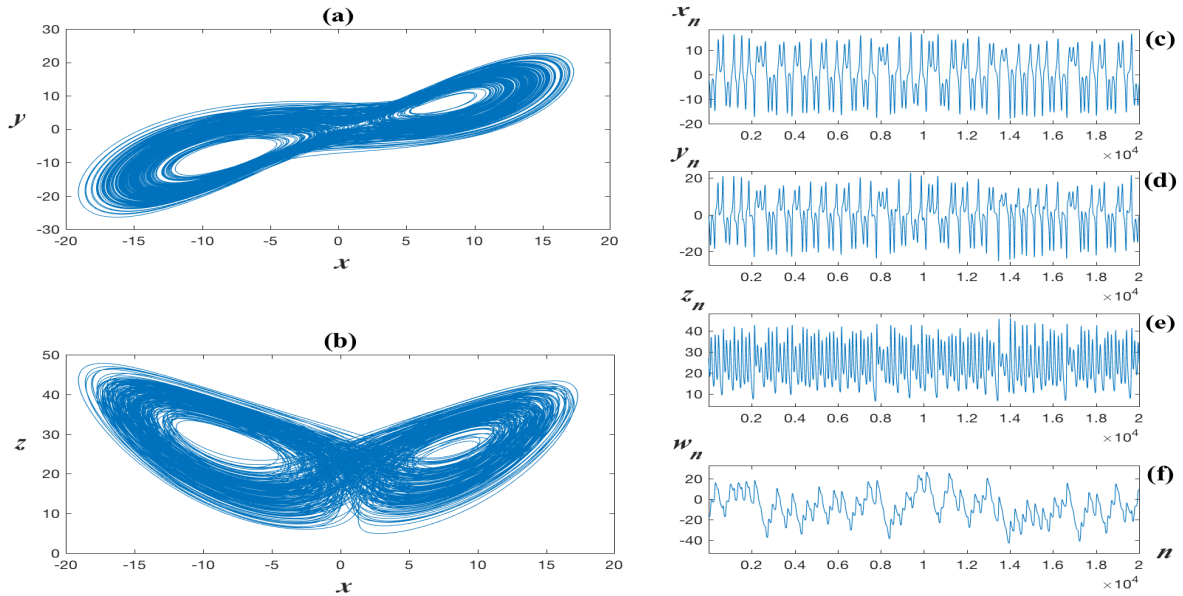


Figura 3.9: Proyecciones del sistema hipercaótico de Lorenz (a) $x - y$, (b) $x - z$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y , (e) z y (f) w .

hipercaótica. Asimismo, la dimensión de Lyapunov fue de $D_L \approx 3.05$.

3.2.4 Sistema de Rössler

Versión caótica

Las simulaciones del sistema de Rössler (3.7) se realizaron para los valores $q = 1$, $(a, b, c) = (0.2, 0.2, 5.7)$ y con las condiciones iniciales $(x(0), y(0), z(0)) = (0.5, 1.5, 0.1)$ y un paso de tiempo $h = 0.01$. En la figura 3.10 se muestran las series temporales resultantes, así como algunas proyecciones del sistema.

Por otro lado, los valores de los exponentes de Lyapunov de tal sistema son $\lambda_1 \approx 0.1$, $\lambda_2 \approx 0$ y $\lambda_3 \approx -5.69$, lo cual indica que el sistema se encuentra en régimen caótico. La dimensión de Lyapunov de dicho sistema fue de $D_L \approx 2.01$.

Versión fraccional

De igual manera, las series temporales resultantes de cada uno de los estados, así como algunas proyecciones del sistema (3.7) para los valores $q = 0.9$, $(a, b, c) =$

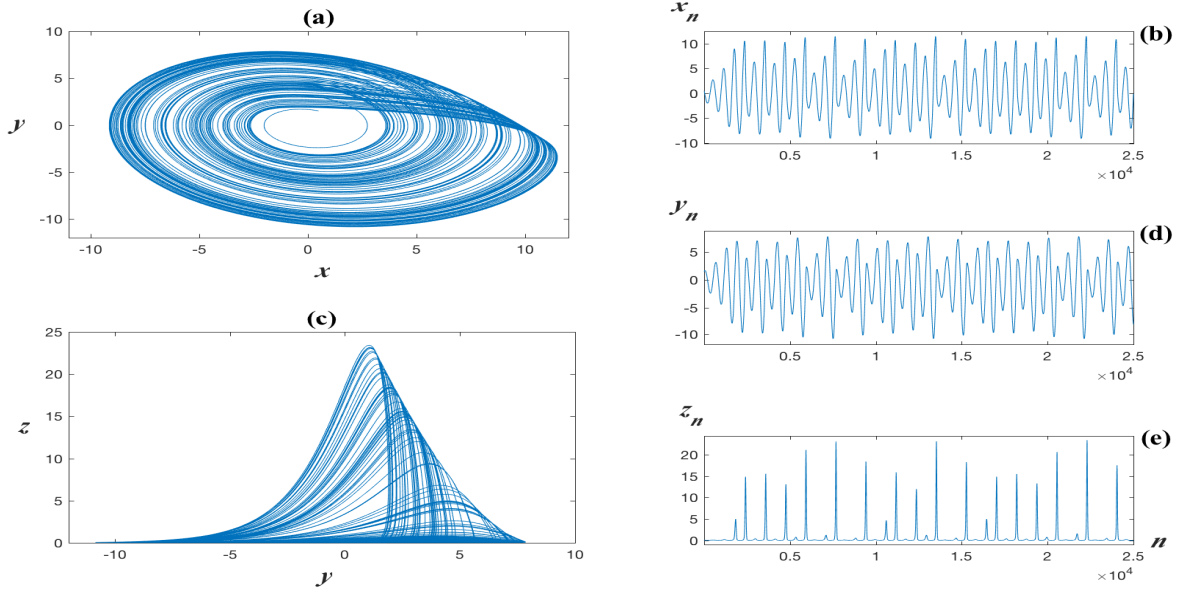


Figura 3.10: Proyecciones del sistema caótico de Rössler (a) $x-y$, (b) $z-y$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y y (e) z .

(0.1, 0.2, 5.7) y con las condiciones iniciales $(x(0), y(0), z(0)) = (0.5, 1.5, 0.1)$ y un paso de tiempo $h = 0.0001$ se presentan en la figura 3.11.

Los exponentes de Lyapunov de dicho sistema fueron $\lambda_1 \approx 0.05$, $\lambda_2 \approx 0$ y $\lambda_3 \approx -5.69$, tales valores de los exponentes dejan evidencia del comportamiento caótico. Mientras que, la dimensión de Lyapunov fue de $D_L \approx 2.08$, la cual es muy similar a la obtenida en la versión caótica.

Versión hipercaótica

Por último, en la figura 3.12 se muestran algunas proyecciones del sistema, así como las series temporales resultantes de los estados del sistema (3.8). En este caso las condiciones iniciales fueron $(x(0), y(0), z(0), w(0)) = (-13, -3, 0, 15)$, con un paso de tiempo $h = 0.015$.

Bajo estas condiciones el sistema presentó un comportamiento hipercaótico, debido a que sus exponentes de Lyapunov fueron $\lambda_1 \approx 0.10$, $\lambda_2 \approx 0.12$, $\lambda_3 \approx 0$, $\lambda_4 \approx -17.26$. El valor de la dimensión de Lyapunov del atractor para este sistema fue de $D_L \approx 3.01$.

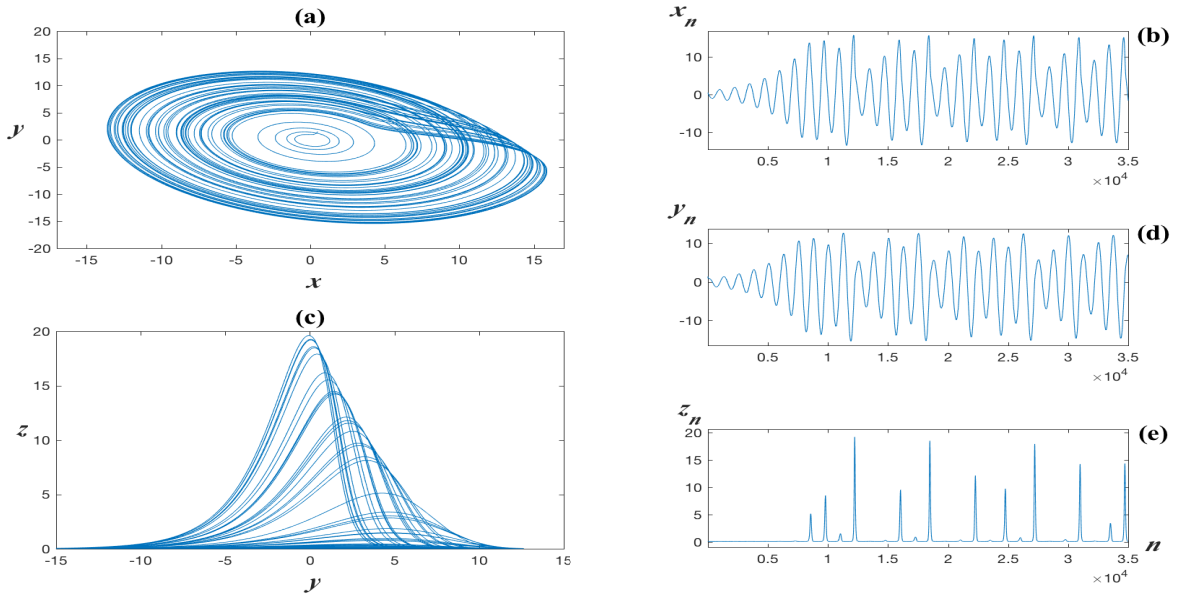


Figura 3.11: Proyecciones del sistema caótico fraccional de Rössler (a) $x - y$, (b) $z - y$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y y (e) z .

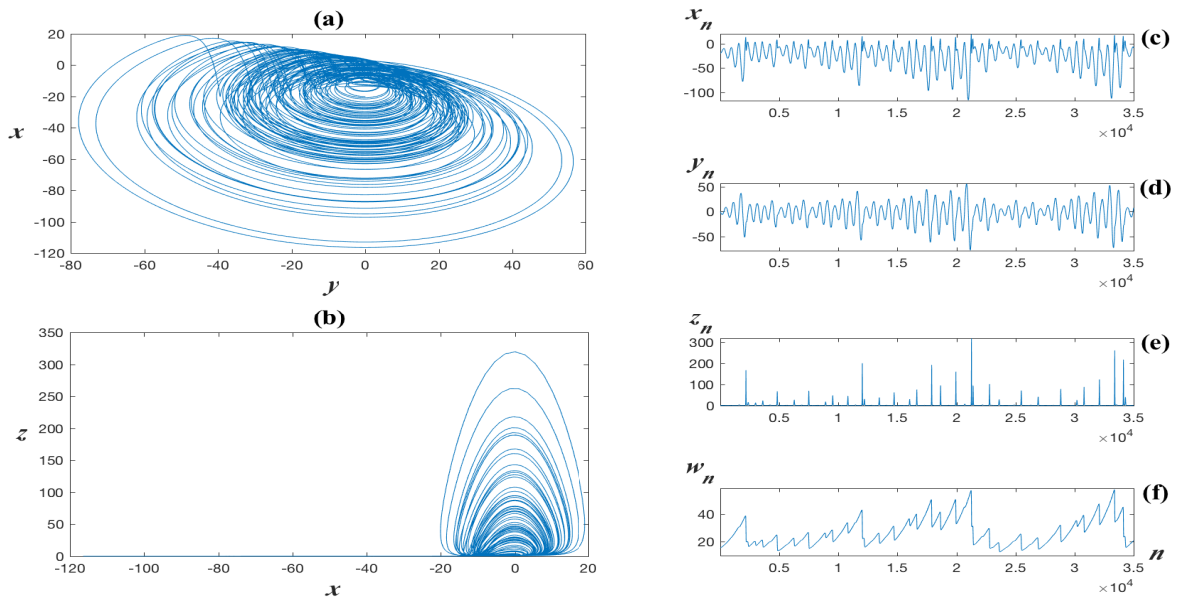


Figura 3.12: Proyecciones del sistema hipercaótico de Rossler (a) $y - x$, (b) $x - z$. Series temporales de los estados (c) x , (d) y , (e) z y (f) w .

ANÁLISIS DE ENERGÍA A LAS SERIES TEMPORALES

En este capítulo se presentan los resultados del análisis de energía que se aplica a las series temporales de los sistemas descritos en el capítulo 3. Este análisis nos auxiliará a conocer la distribución de la energía en los diferentes niveles de descomposición, y por ende se tendrá información adicional para el análisis.

De la ecuación (2.10) se puede ver que la TWD es una transformación que preserva la energía. Así, la contribución de energía de una serie temporal puede escribirse como

$$E_x = \sum_{n=1}^N |x[n]|^2 = E_{a_n} + \sum_{m=1}^M E_{d_{m,n}}, \quad (4.1)$$

donde $E_{a_n} = \sum_{n=1}^N |a_{M,n}|^2$ y $E_{d_{m,n}} = \sum_{n=1}^N |d_{m,n}|^2$. Para este cálculo de energía se utilizó la función wavelet *db2*. En el análisis se consideraron series temporales numéricas de 65,536 y 131,072 muestras, con $m = \log_2(65,536) = 16$ y $m = \log_2(131,072) = 17$ niveles de descomposición wavelet, respectivamente.

4.1 Sistema de Chen

En la figura 4.1 se muestra la distribución de energía de los tres estados del sistema caótico (3.1) en sus 16 niveles de transformación. Se puede visualizar que la energía se concentra en un conjunto pequeño de niveles; en particular, para los estados x , y y z los niveles con mayor energía ocurrieron en $m = 9$, $m = 8$ y $m = 8$, respectivamente.

De manera análoga, en la figura 4.2 se presenta la distribución de energía de los estados para la versión fraccional del sistema (3.1), se puede observar una

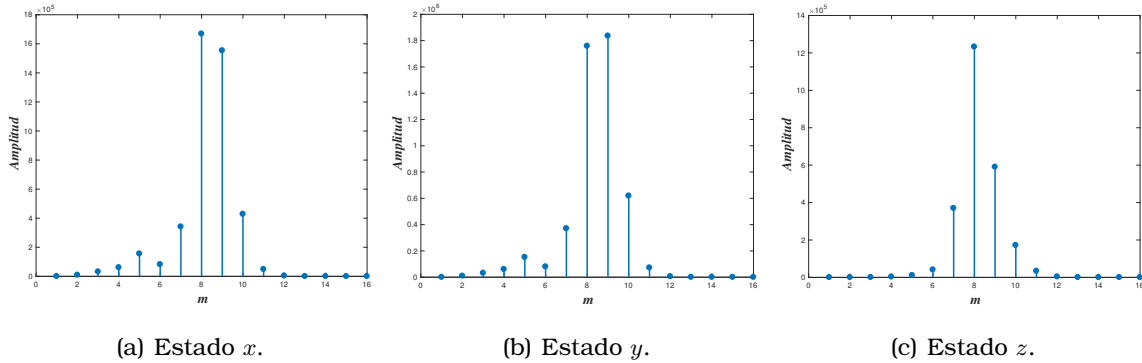


Figura 4.1: Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema caótico de Chen.

distribución de la energía similar al caso caótico, con mayor energía en el nivel $m = 8$ para los estados x y y , y en el nivel $m = 9$ en el estado z .

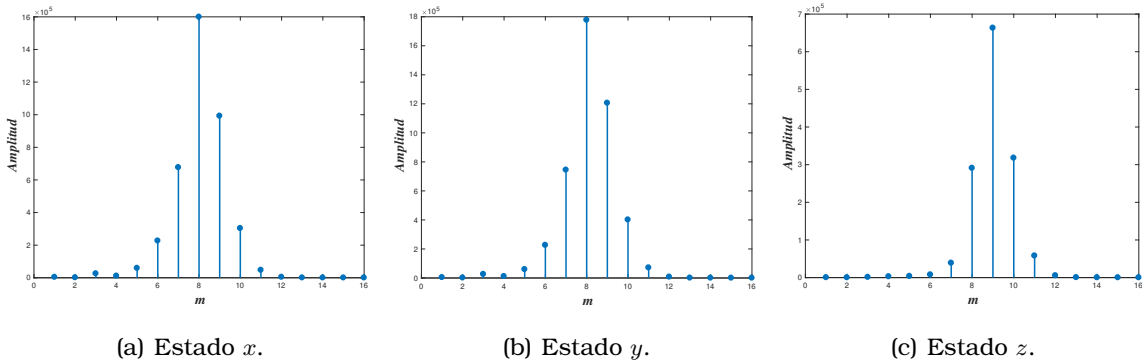


Figura 4.2: Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema caótico fraccionario de Chen.

La distribución de energía del sistema hipercaótico (3.2) se muestra en la figura 4.3. En este caso, la distribución de los estados x , y y z presentan un comportamiento de tipo exponencial creciente seguido de un comportamiento exponencial decreciente, donde el nivel de mayor energía ocurre para $m = 9$ para los tres estados. Por otra parte, el estado w presenta un comportamiento un poco distinto, si descartamos el nivel de mayor energía $m = 3$, tenemos un comportamiento de tipo exponencial decreciente.

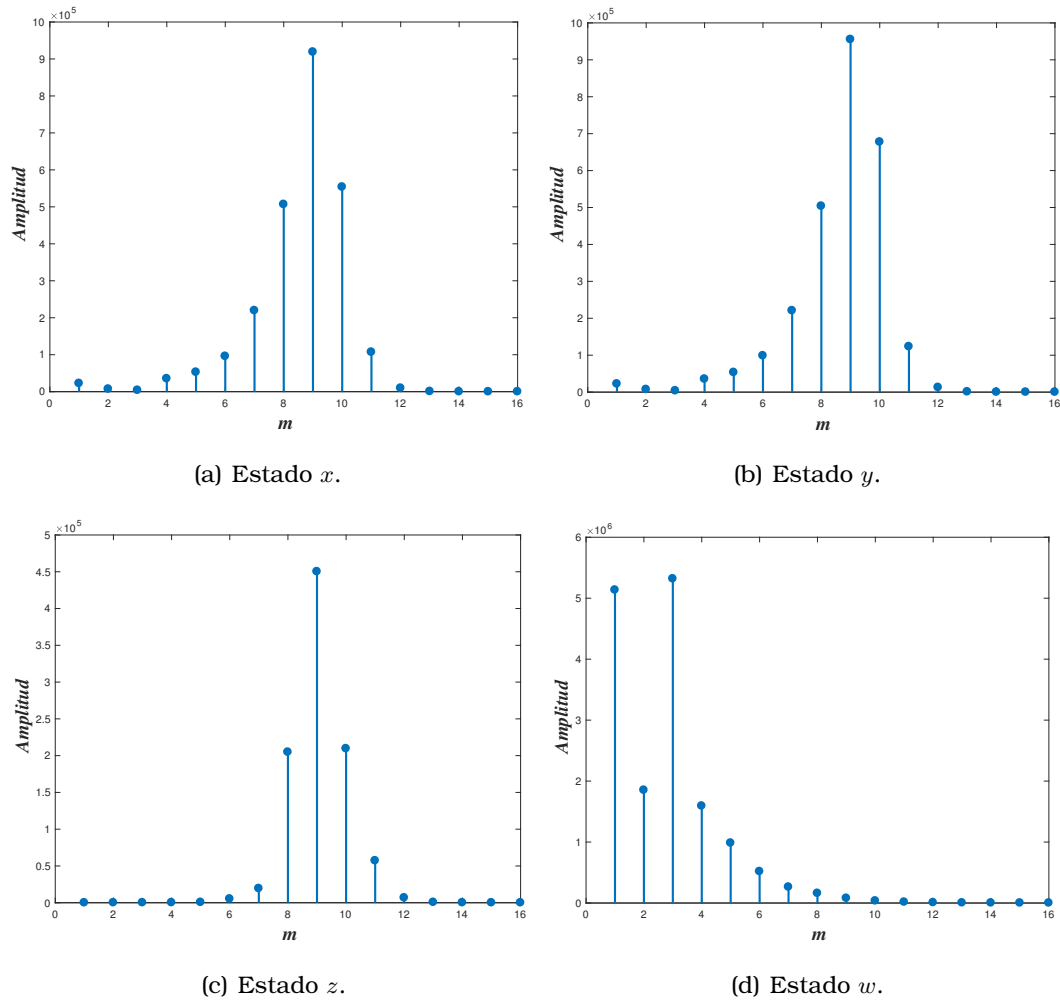


Figura 4.3: Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema hipercaótico de Chen.

4.2 Sistema de Chua

En la figura 4.4 se muestra la distribución de energía del sistema caótico (3.3) en los 16 niveles de transformación. Se puede visualizar que en los estados x y z se presenta una contribución de energía en diferentes niveles de transformación, mientras que en el estado y la energía se concentra en un conjunto pequeño de niveles; en particular el nivel con mayor energía ocurrió en $m = 10$.

De igual manera, en la figura 4.5 se presenta la distribución de energía de los

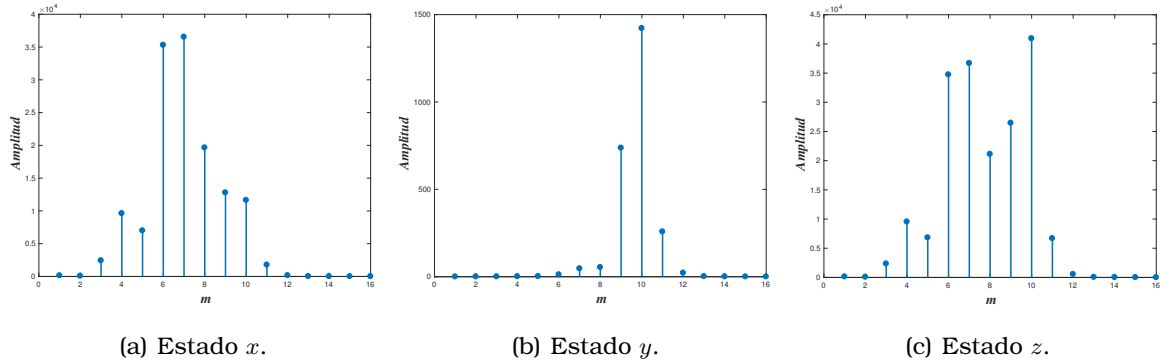


Figura 4.4: Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema caótico de Chua.

estados para la versión fraccional del sistema (3.3). En este caso, los estados x y z presentan una distribución de energía similar. Por otra parte, el estado y presenta una distribución de energía en un conjunto pequeño de niveles; en particular, para los estados x , y , y z los niveles con mayor energía ocurrieron en $m = 8$.

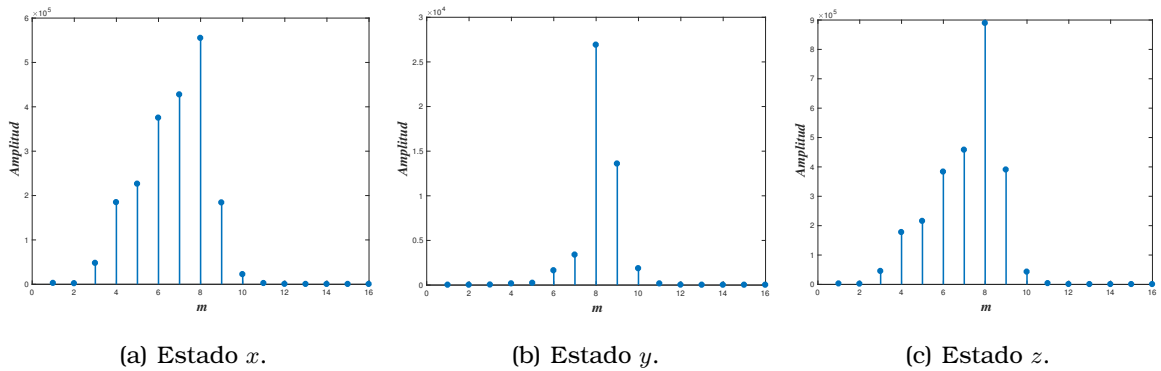


Figura 4.5: Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema caótico fraccionario de Chua.

De manera análoga, en la figura 4.6 se presenta la distribución de energía de los estados para la versión hipercaótica del sistema (3.4). Se puede visualizar que la energía se concentra en un conjunto de niveles; en particular, para los estados x , y , z y w el nivel de mayor energía ocurrió en $m = 11$.

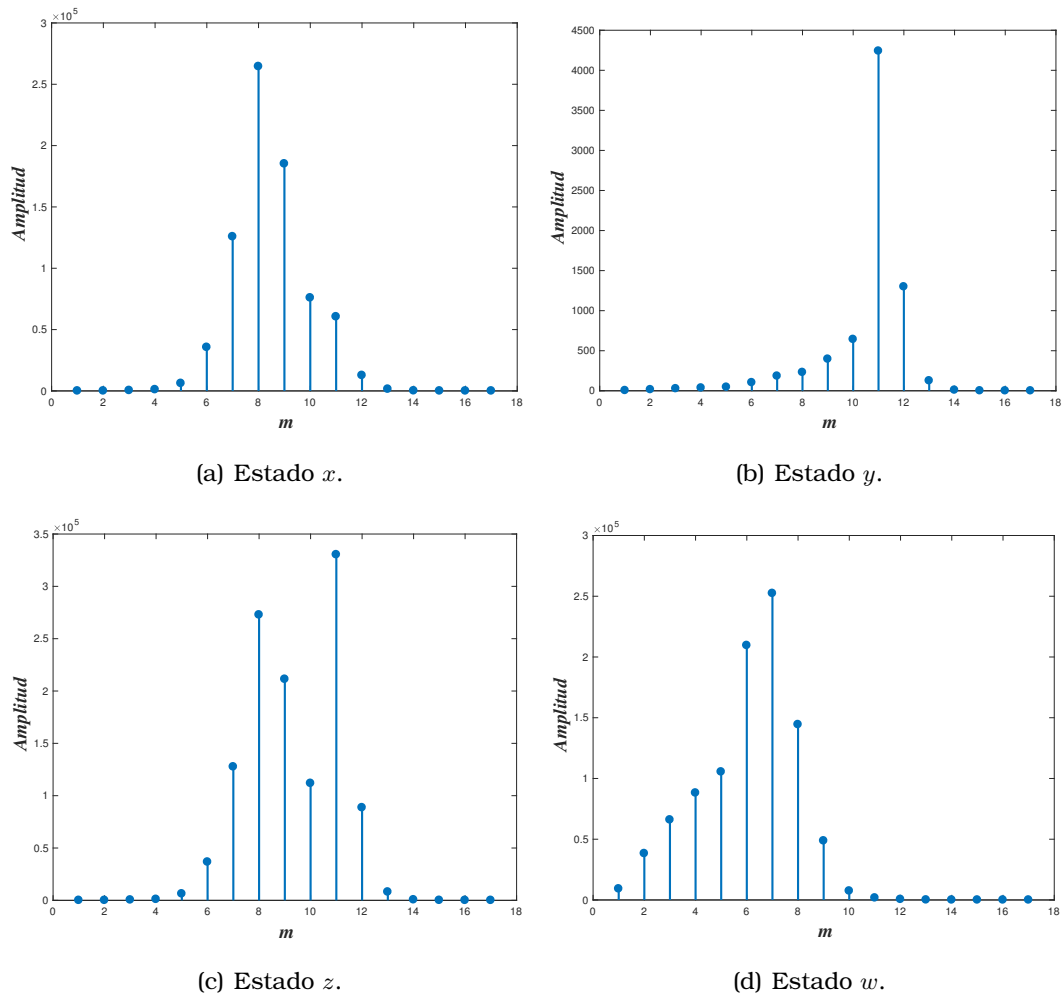


Figura 4.6: Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema hipercaótico de Chua.

4.3 Sistema de Lorenz

En la figura 4.7 se muestran la distribución de los tres estados del sistema caótico (3.5). Se puede visualizar que en los estados x y y presentan una contribución de energía en diferentes niveles. Por otra parte, el estado z presenta una concentración de energía en un conjunto pequeño de niveles; en particular, para los estados x , y y z los niveles con mayor energía ocurrieron en $m = 8$, $m = 9$ y $m = 9$, respectivamente.

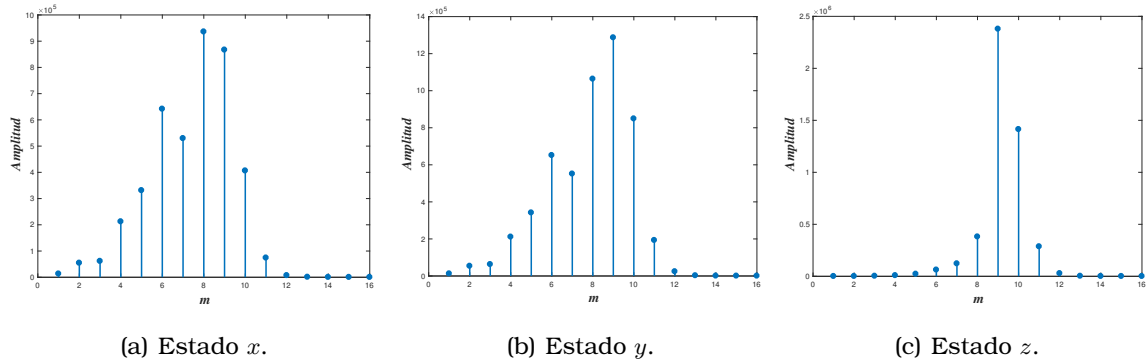


Figura 4.7: Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema caótico de Lorenz.

De manera análoga, en la figura 4.8 se presenta la distribución de energía de los estados para la versión fraccional del sistema (3.6), se puede observar en la distribución de los estados x , y y z presentan un comportamiento similar al caso caótico, con mayor energía en el nivel $m = 10$ para los tres estados.

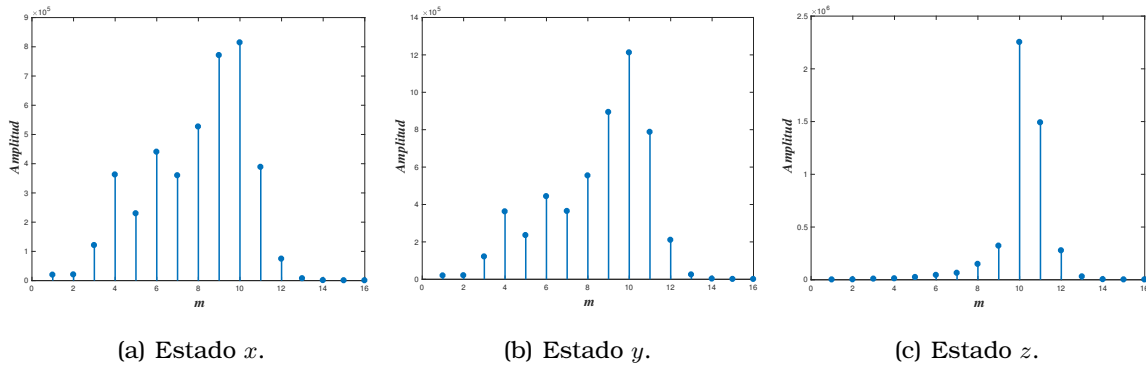


Figura 4.8: Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema caótico fraccionario de Lorenz.

La distribución de energía del sistema hipercaótico (3.6) se muestra en la figura 4.9. En este caso, la distribución de los estados x , y y z se concentra en un conjunto pequeño de niveles. Por otra parte, el estado w presenta concentración en diferentes niveles; en particular, para los estados x , y , z y w los niveles con mayor energía ocurrieron en $m = 9$, $m = 9$, $m = 10$ y $m = 7$, respectivamente.

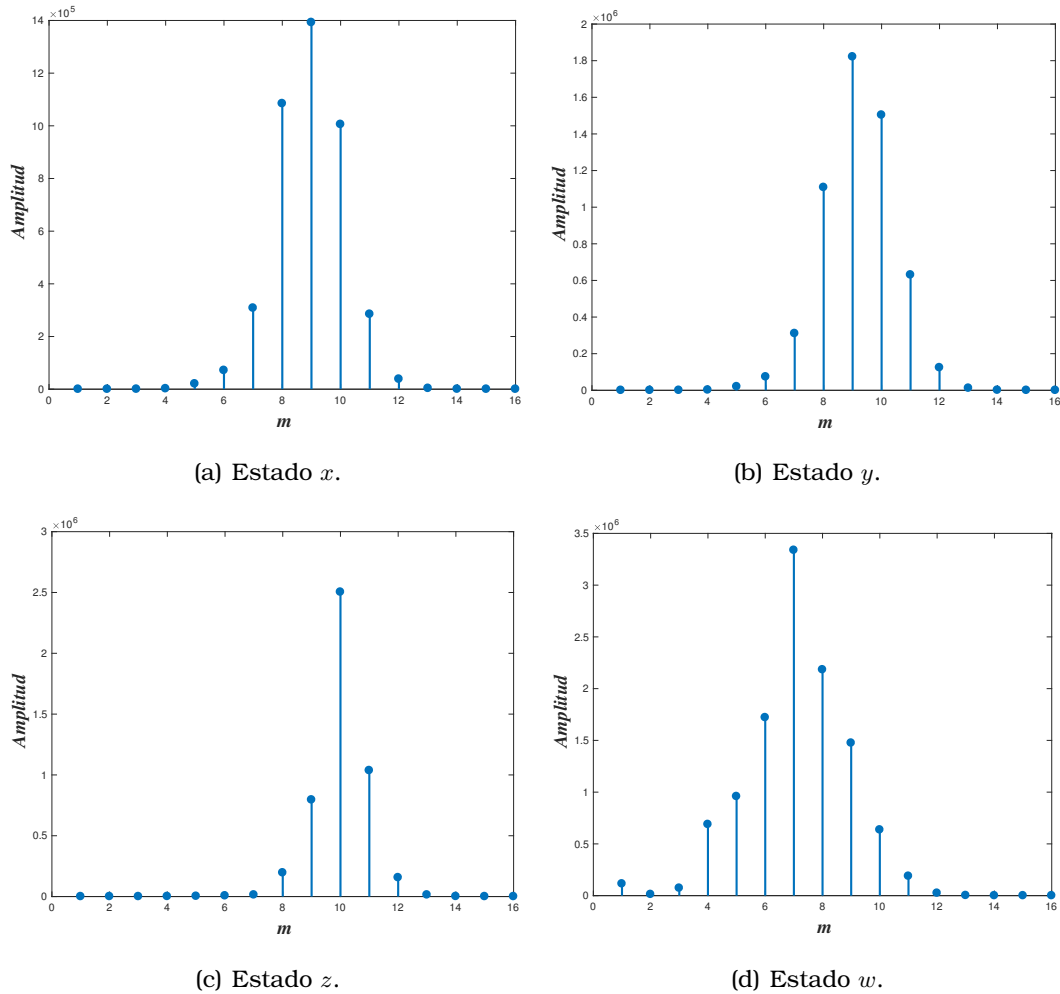


Figura 4.9: Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema hipercaótico de Lorenz.

4.4 Sistema de Rössler

En la figura 4.10 se muestra la distribución de energía de los tres estados del sistema caótico (3.7) en sus 16 niveles de transformación. Se puede visualizar que en los estados x y y la energía se concentra en diferentes niveles, mientras que, en el estado z la energía se concentro en un conjunto pequeño de niveles; en particular, para los estados x , y y z los niveles con mayor energía ocurrieron en $m = 8$, $m = 8$ y $m = 10$, respectivamente.

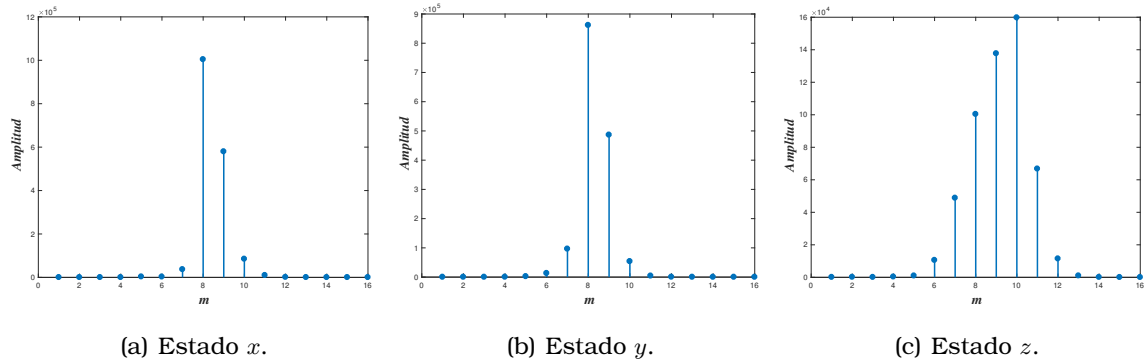


Figura 4.10: Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema caótico de Rössler.

De igual manera, en la figura 4.11 se presenta la distribución de energía de los estados para la versión fraccional del sistema (3.7), se puede observar en la distribución de los datos x , y y z presentan un comportamiento similar al caso caótico, con mayor energía en el nivel $m = 8$, $m = 7$ y $m = 8$, respectivamente.

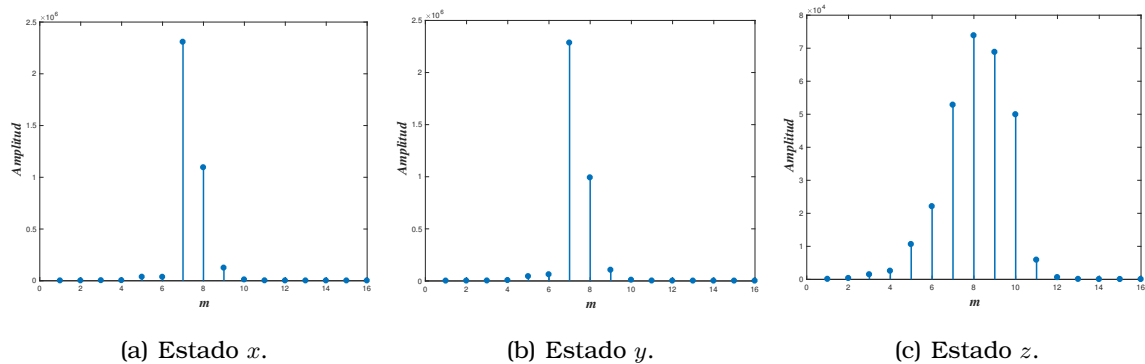


Figura 4.11: Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema caótico fraccionario de Rössler.

Por último, la distribución de energía del sistema hipercaótico (3.8) se muestra en la figura 4.12. En este caso, la distribución de los estados x y y presentan concentración en un conjunto pequeño de niveles, donde el nivel de mayor energía para ambos estados ocurre para $m = 9$. Por otra parte, la distribución de los estados z y w presentaron una distribución en diferentes niveles; en particular para estos dos estados los niveles ocurrieron en $m = 11$ y $m = 4$, respectivamente.

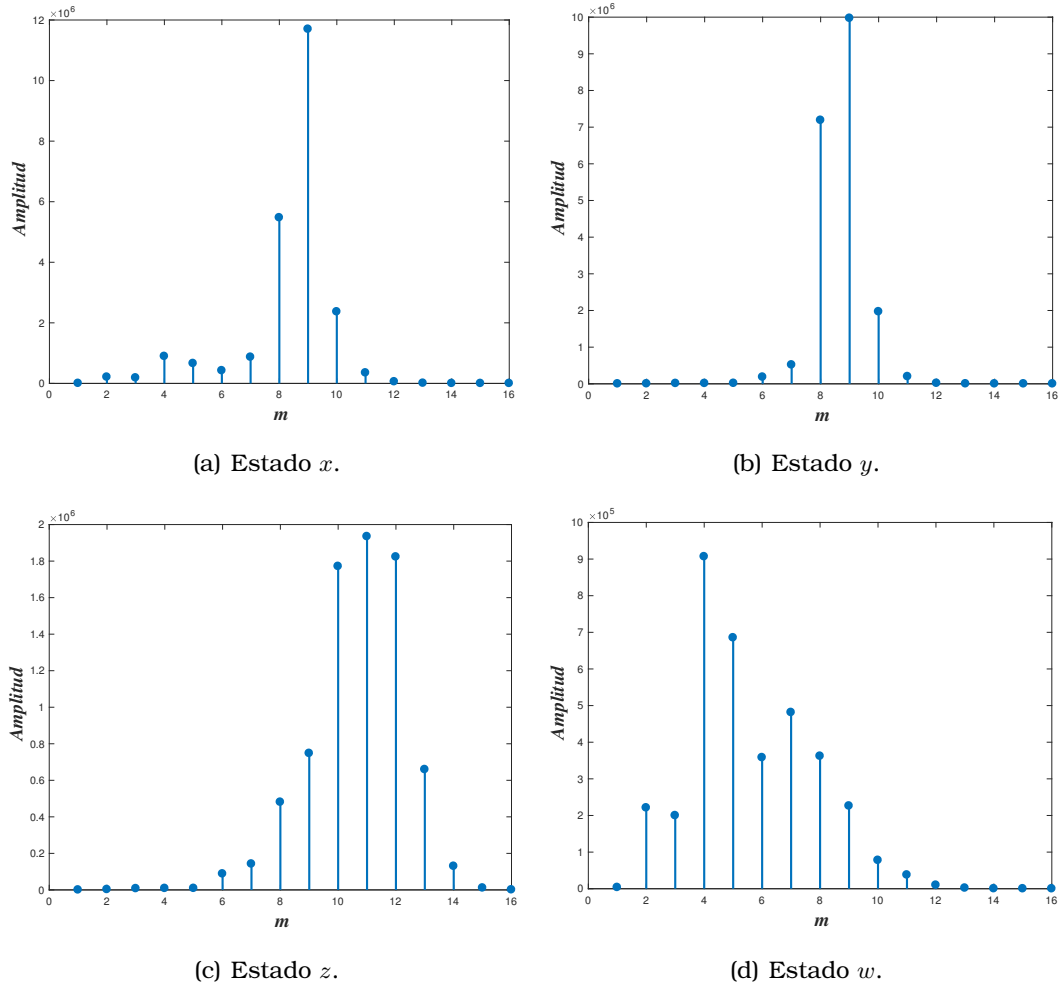


Figura 4.12: Gráficas de la distribución de energía de los estados del sistema hipercaótico de Rössler.

5

ANÁLISIS DE ESCALA A LAS SERIES TEMPORALES

En este capítulo se presenta el análisis de escala basado en la TWD de las series de tiempo con dinámica caótica e hipercaótica, las cuales provienen de los sistemas descritos en el capítulo 3. En el análisis de escala la interpretación de los resultados se basa en el comportamiento de escala que presenta la varianza de los coeficientes de la transformada wavelet obtenidos con respecto a los diferentes niveles de descomposición. El análisis de escala se ha usado para diferentes series de tiempo obtenidas de señales, por ejemplo, en [21] se estudian las series temporales provenientes de circuitos electrónicos los cuales presentaron dinámica caótica, estos presentaron comportamiento de tipo ruido y algunos tenían una gran concentración de energía en ciertos niveles de la transformación.

En este trabajo se utilizó la función wavelet *db2* para calcular la transformada wavelet, esta misma función fue la usada para calcular la energía en el capítulo 4. También, como en el capítulo 4, se consideraron series temporales numéricas de 65,536 y 131,072 muestras, correspondiendo a $m = \log_2(65,536) = 16$ y $m = \log_2(131,032) = 17$ niveles de la TWD, respectivamente.

Para establecer el comportamiento que presentan las series temporales se consideran las siguientes observaciones, las cuales se describieron anteriormente (capítulo 2):

- ▶ Si en la gráfica del logaritmo de la varianza de los coeficientes wavelet muestra un máximo en un nivel particular de transformación, o bien en un conjunto pequeño de niveles de transformación, implica que tiene una alta concentración de energía en ese nivel, o junto con sus niveles contiguos. Lo anterior indica que la serie temporal tiene un comportamiento tipo *frecuencia*

portadora [20].

- ▶ Si en la gráfica del logaritmo de la varianza de los coeficientes wavelet presenta una recta con pendiente negativa, indica un comportamiento del tipo *fractal* en la serie temporal. Lo anterior es un indicativo de presencia de auto-similaridad de tipo estadístico en la serie, es decir una serie temporal $g(t)$ es auto-similar estadísticamente si para cualquier valor $a > 0$ sigue la relación de escala $f(t) = a^{-H} f(at)$, donde H es el parámetro de auto-similaridad [18].
- ▶ Si en la gráfica del logaritmo de la varianza de los coeficientes wavelet presenta un comportamiento de línea horizontal (gradiente cero), resulta que la contribución de la energía se encuentra en diferentes niveles resultando un comportamiento correspondiente al tipo *ruido Gaussiano* [20].

Por otro lado, el procedimiento que se siguió para deducir el tipo de comportamiento que presentan las series temporales se describe a continuación: Como primer paso, se calculó la transformada wavelet de la serie temporal original, posteriormente se obtuvo la gráfica del logaritmo de la varianza de los coeficientes wavelet (ver ecuación (2.13)), en esta gráfica se puede observar cualquiera de los tres casos que se describieron anteriormente, como siguiente paso, se obtuvo la reconstrucción (ver ecuación (2.9)) de la serie temporal considerando solamente algunos de los niveles y por último para verificar el error que se tenía en la reconstrucción, se calculó el error punto a punto entre la serie temporal original y su reconstrucción.

5.1 Sistema de Chen

En principio se analizó la serie temporal del estado x del sistema caótico (3.1). En la figura 5.1(a) se muestra la serie temporal original del estado x , mientras que en la figura 5.1 (b) se ilustra el logaritmo de la varianza de los coeficientes wavelet en función del nivel de transformación m . Se puede observar que en el conjunto de niveles $m = 6$ hasta $m = 10$ tiene una alta concentración de energía, a partir de estos niveles se realizó la reconstrucción de la serie, ver figura 5.1 (c). Con la finalidad de verificar el error que se tiene entre la serie temporal y su reconstrucción, en la figura 5.1 (d) se muestra la gráfica de error entre la serie temporal y su respectiva

reconstrucción. Con lo anterior se puede deducir que la serie temporal del estado x de la versión caótica del sistema (3.1) presenta un tipo de comportamiento del tipo *frecuencia portadora*.

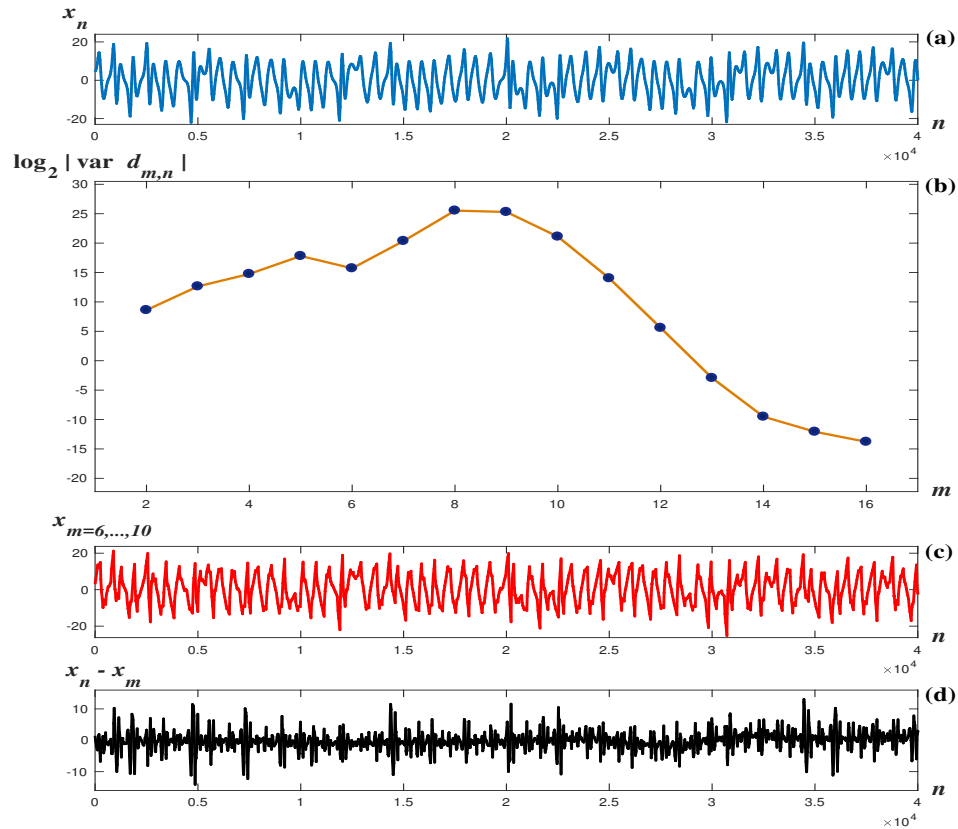


Figura 5.1: Resultados del análisis de escala del sistema caótico de Chen.

De forma análoga, en la figura 5.2 (a) se presenta la serie temporal correspondiente al estado y de la versión fraccional del sistema (3.1), en la figura 5.2 (b) se ilustra el logaritmo de la varianza de los coeficientes wavelet en función del nivel de transformación m , en esta figura se puede visualizar que la energía se concentra dentro del conjunto de niveles $m = 6, \dots, 10$. Mientras que en la figura 5.2 (c) se presenta la reconstrucción del estado considerando los dichos niveles, por lo que el estado presenta un comportamiento del tipo *frecuencia portadora*. Con el fin de verificar el error que presenta la reconstrucción, en la figura 5.2 (d) se ilustra el error entre la serie temporal y su reconstrucción.

La serie temporal del estado z del sistema hipercaótico (3.2) se muestra en la

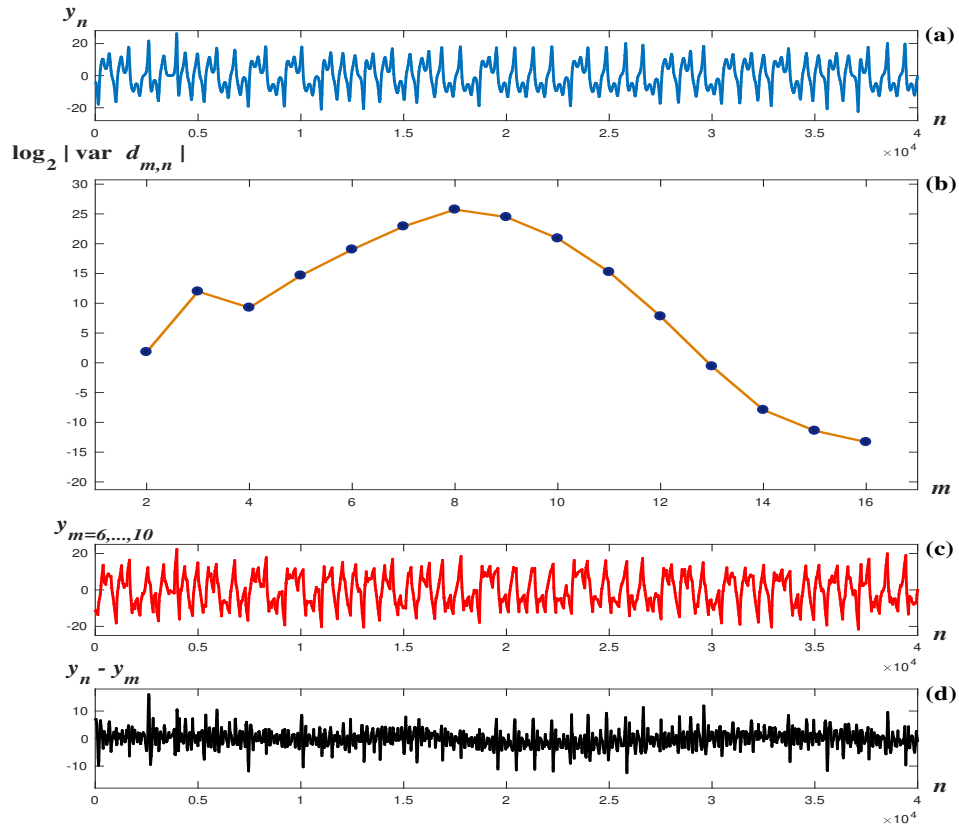


Figura 5.2: Resultados del análisis de escala del sistema caótico fraccionario de Chen.

figura 5.3 (a), mientras que en la figura 5.3 (b) se muestra el logaritmo de la varianza de los coeficientes wavelet con respecto al nivel de transformación m , se puede apreciar que en el intervalo de niveles desde $m = 7$ hasta $m = 11$ se presenta una alta concentración de energía. Debido a lo anterior, se muestra la reconstrucción de la serie temporal a partir de dichos niveles en la figura 5.3 (c). Por lo que se puede determinar que el estado presenta un comportamiento del tipo *frecuencia portadora* ya que se necesitan pocos niveles de transformación para poder tener una buena reconstrucción. Con el fin de verificar lo anterior, en la figura 5.3 (d) se muestra el error entre la serie de tiempo original y su reconstrucción.

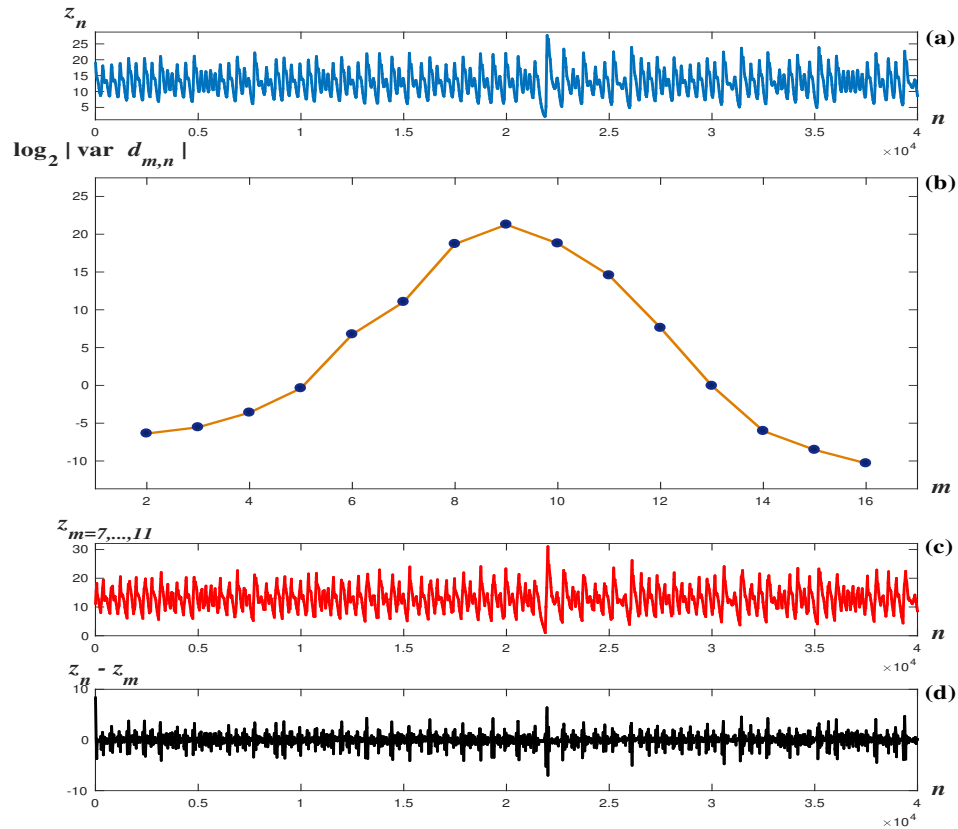


Figura 5.3: Resultados del análisis de escala del sistema hipercaótico de Chen.

5.2 Sistema de Chua

La serie temporal del estado z de la versión caótica del sistema (3.3) es presentada en la figura 5.4 (a), mientras que el logaritmo de la varianza de los coeficientes wavelet en función del nivel de transformación m se ilustra en la figura 5.4 (b), se puede visualizar que se presenta una alta concentración de energía dentro de los niveles $m = 5, \dots, 11$, por lo que al realizar la reconstrucción de la serie temporal se logra una aproximación representativa de la serie temporal original, ver figura 5.4 (c). Sin embargo, el error que se obtuvo entre ambas series aún es considerable, como se ilustra en la figura 5.4 (d). De hecho, al observar la figura 5.4 (b), se podría considerar que se presentan dos tipos de comportamientos, el de *ruido Gaussiano* para los primeros niveles, mientras que el comportamiento *fractal* para los últimos niveles, pero con base al error obtenido predomina el comportamiento

del tipo *ruido Gaussiano*.

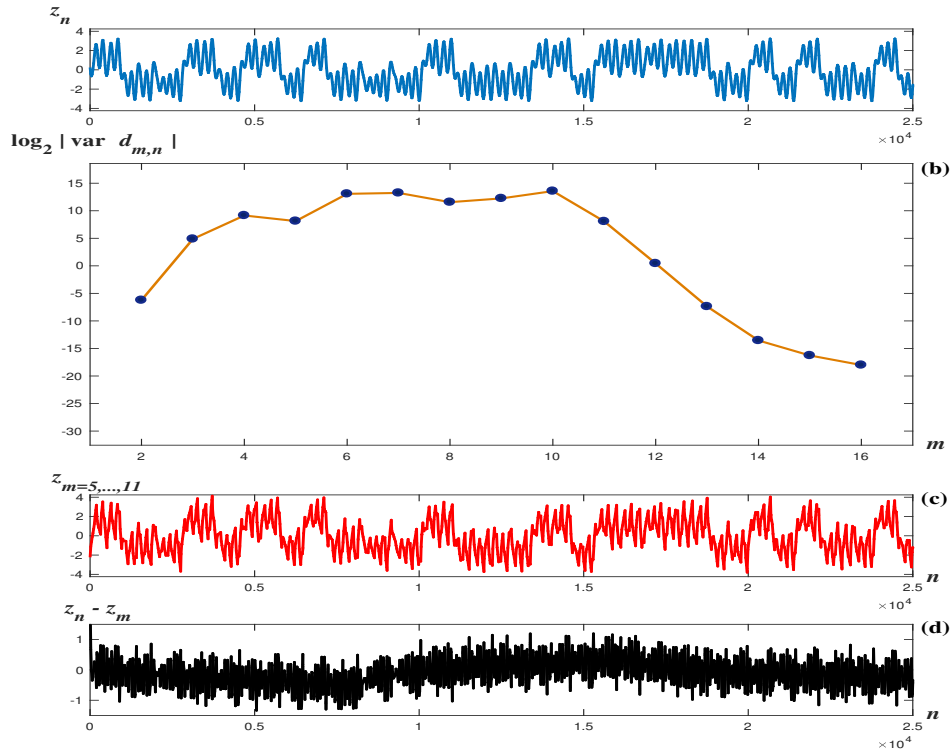


Figura 5.4: Resultados del análisis de escala del sistema caótico de Chua.

En la figura 5.5 (a) se presenta la serie temporal correspondiente al estado y de la versión fraccional del sistema (3.3), el logaritmo de la varianza de los coeficientes wavelet se ilustra en la figura 5.5 (b); en particular, se puede observar que la energía presenta una concentración dentro del conjunto de niveles $m = 6, \dots, 10$. Se realizó la reconstrucción de la serie temporal considerando solamente estos niveles, ver figura 5.5 (c). El error que se tiene entre la serie temporal original y su reconstrucción se ilustra en la figura 5.5 (d). Debido a este resultado, la serie temporal presenta un comportamiento del tipo *frecuencia portadora*, ya que se necesitan pocos niveles de transformación para obtener una buena reconstrucción.

Al analizar el estado w de la versión hipercaótica del sistema (3.4), se obtuvieron resultados que no se presentaban en sistemas con dinámica caótica de tres estados.

En la figura 5.6 se muestran los resultados obtenidos del estado w del sistema hipercaótico (3.4), en la figura 5.6 (a) se muestra la serie temporal del estado,

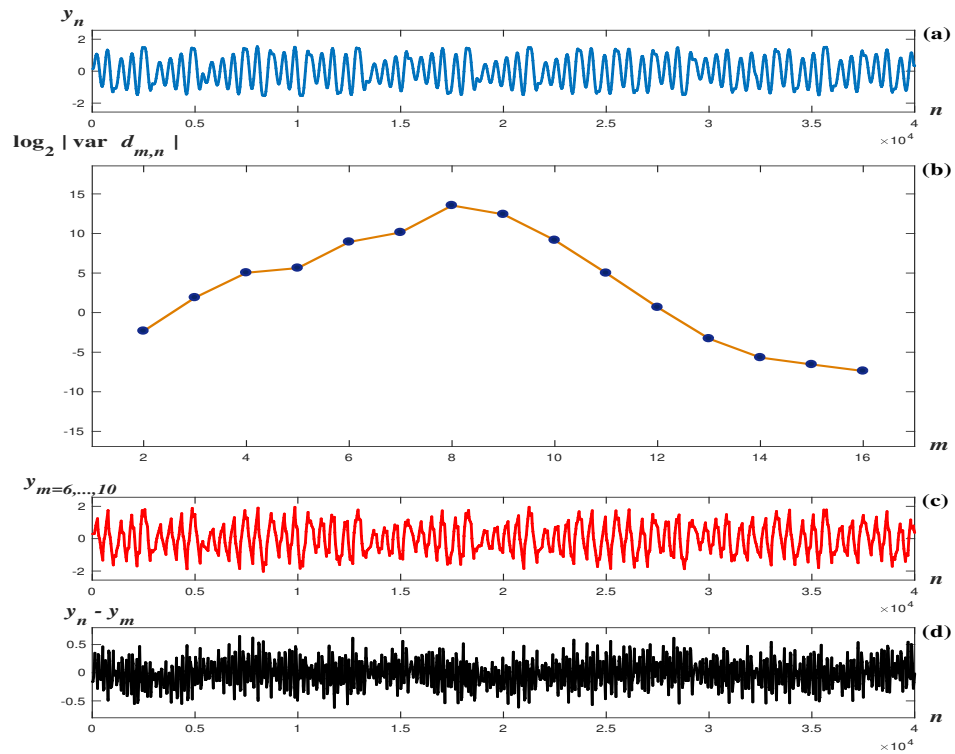


Figura 5.5: Resultados del análisis de escala del sistema caótico fraccionario de Chua.

mientras que en la figura 5.6 (b) se ilustra el logaritmo de la varianza de los coeficientes en función del nivel de transformación m . En esta gráfica se puede observar una línea con pendiente negativa, denotada por β , por lo que se puede deducir que la serie temporal presenta un comportamiento del tipo *fractal*, donde $\beta \approx 2.26$. Cabe mencionar que en este tipo de comportamiento no se puede llegar a obtener una reconstrucción de la serie temporal.

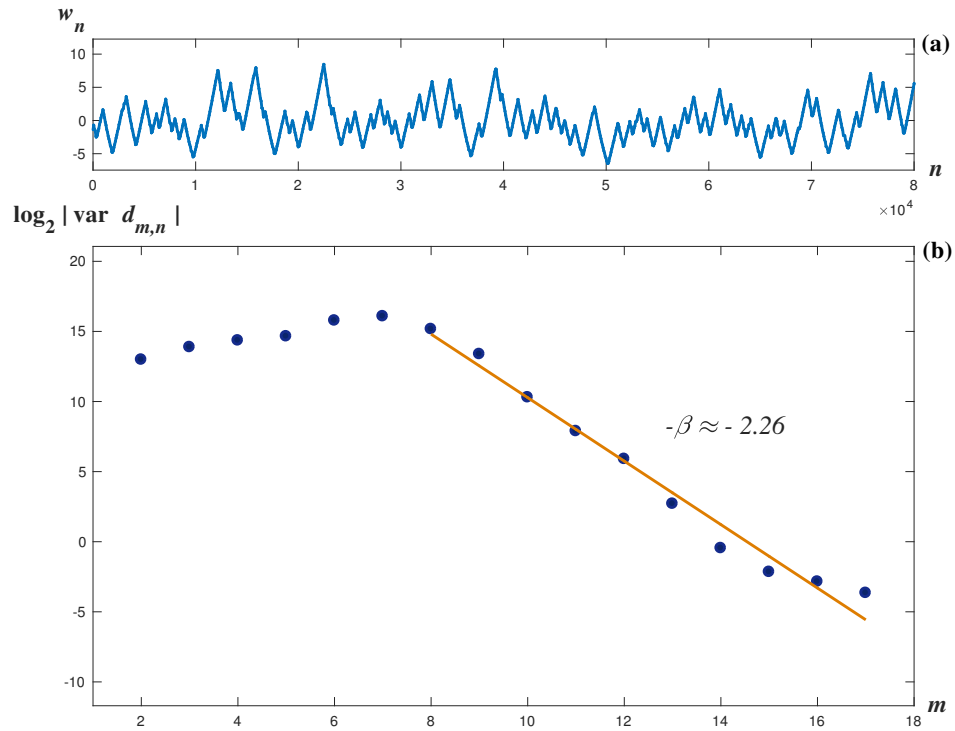


Figura 5.6: Resultados del análisis de escala del sistema hipercaótico de Chua.

5.3 Sistema de Lorenz

La serie temporal del estado y de la versión caótica del sistema (3.5) se muestra en la figura 5.7 (a). En la figura 5.7 (b) se ilustra el logaritmo de la varianza de los coeficientes wavelet con respecto a los niveles de transformación, en la cual se puede observar que dentro de los primero 10 niveles se tiene una contribución uniforme de energía; en particular dentro del conjunto de niveles $m = 4, \dots, 10$ se presenta una mayor contribución de energía. Al considerar estos siete niveles se obtuvo la reconstrucción de la serie temporal mostrada en la figura 5.7 (c). Asimismo, el error entre la serie temporal original y su reconstrucción se muestra en la figura 5.7 (d). Con lo anterior, se deduce que la serie temporal presenta un comportamiento del tipo *ruido Gaussiano*, ya que se necesitan una gran cantidad de niveles de transformación para poder llegar a tener una aproximación representativa de la serie temporal de inicio.

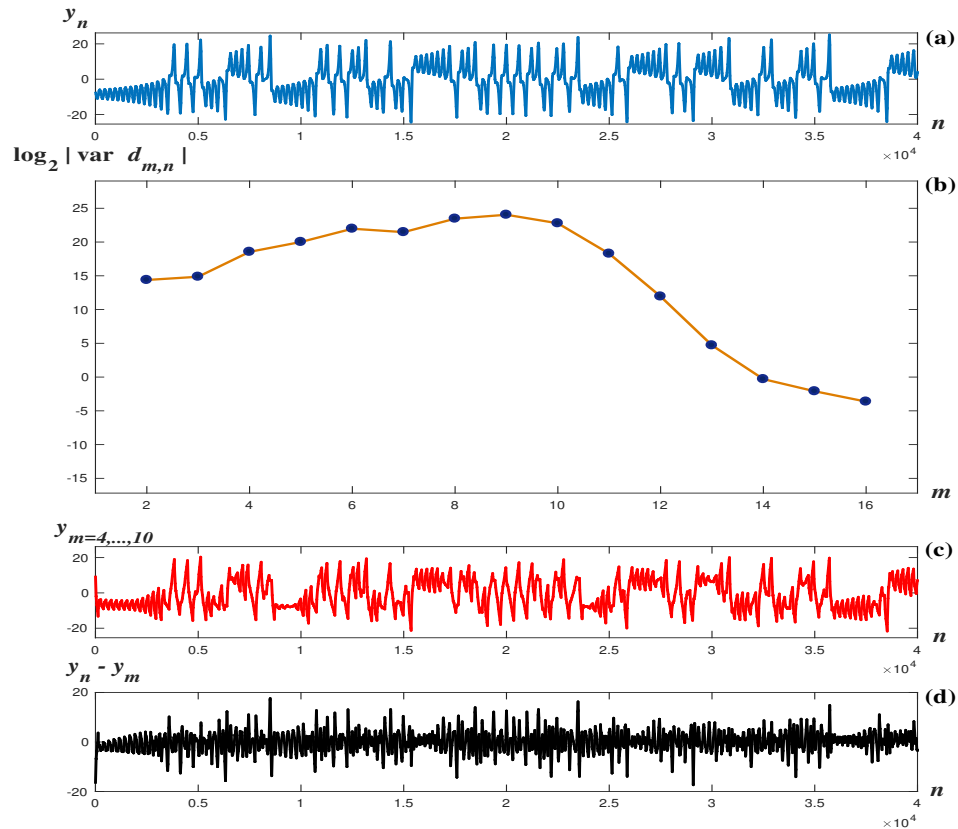


Figura 5.7: Resultados del análisis de escala del sistema caótico de Lorenz.

El análisis de la serie temporal correspondiente a z de la versión fraccional del sistema (3.5) se muestra en la figura 5.8. En la figura 5.8 (a) se muestra la serie temporal original, mientras que en la figura 5.8 (b) se ilustra el logaritmo de la varianza de los coeficientes wavelet en función del nivel m . Se puede visualizar que en el conjunto de $m = 8, \dots, 12$ se tiene un alta concentración de energía, por lo que se realizó la reconstrucción de la serie usando esto niveles, dicha reconstrucción se presenta en la figura 5.8 (c). Por último, se cálculo el error entre la serie original y su reconstrucción. Con los resultados anteriores, se puede deducir que el estado presenta un comportamiento del tipo *frecuencia portadora*, ya que solamente necesita de pocos niveles para su reconstrucción.

De igual manera, en la figura 5.9 (a) se ilustra la serie temporal del estado w del sistema hipercaótico (3.6), en la figura 5.9 (b) se tiene el logaritmo de la varianza de los coeficientes wavelet en función del nivel m . Para realizar la reconstrucción de la

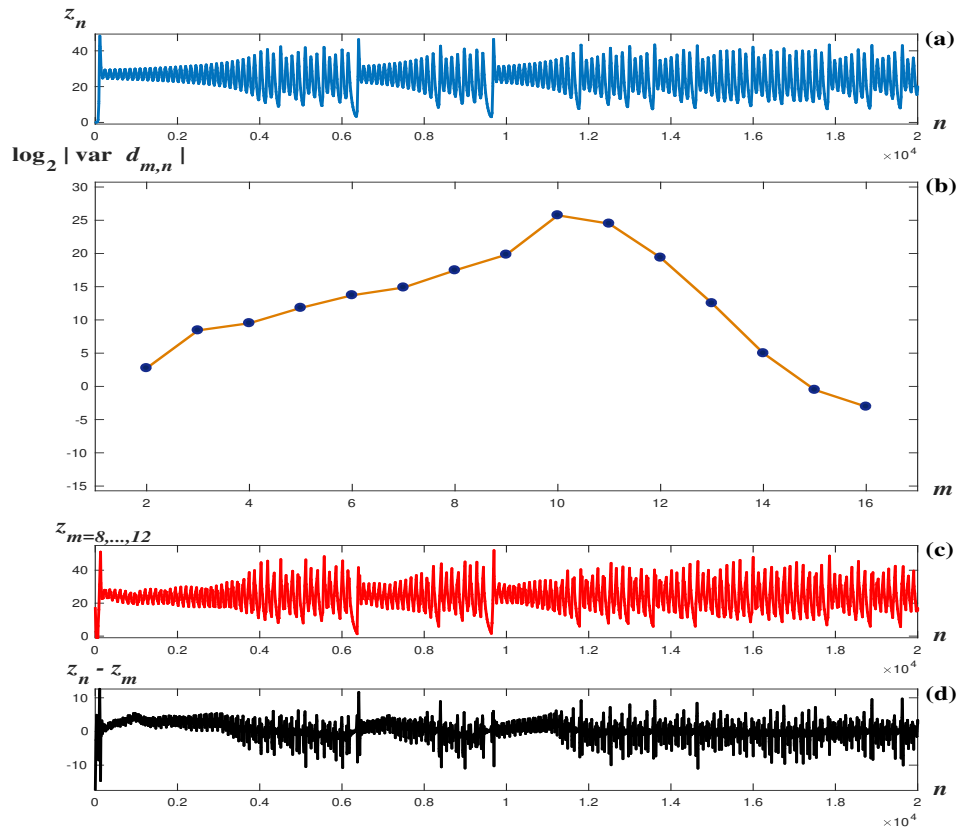


Figura 5.8: Resultados del análisis de escala del sistema caótico fraccionario de Lorenz.

serie temporal, se determinó que el conjunto de niveles $m = 4, \dots, 10$, presentaban una alta contribución de energía, por lo que en la figura 5.9 (c) se ilustra la reconstrucción resultante. Por último, en la figura 5.9 (d) se ilustra el error entre la serie original y su reconstrucción. Lo anterior ilustra que la energía se distribuye en una gran cantidad de niveles, por lo que se puede determinar que el estado tiene un comportamiento del tipo *ruido Gaussiano*, ya que se necesitan una gran cantidad de niveles de transformación para poder tener una buena reconstrucción.

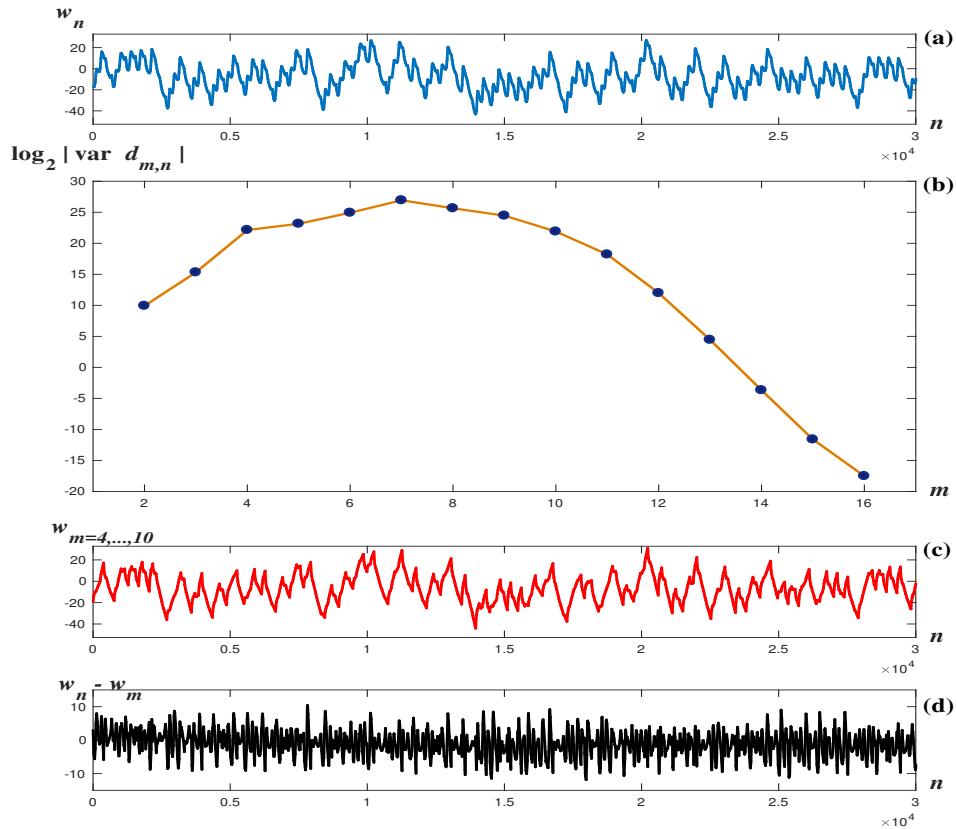


Figura 5.9: Resultados del análisis de escala del sistema hipercaótico de Lorenz.

5.4 Sistema de Rössler

De forma análoga, en la figura 5.10 (a) se muestra la serie temporal del estado x de la versión caótica del sistema (3.7), mientras que en la figura 5.10 (b) se ilustra el logaritmo de la varianza de los coeficientes en función del nivel de transformación m . Se puede observar que en el conjunto de niveles $m = 7$ hasta $m = 10$ se presenta una alta contribución de energía. Para la reconstrucción de la serie temporal se tomaron únicamente los niveles $m = 7, \dots, 10$, la cual se ilustra en la figura 5.10 (c). Lo anterior indica que la serie temporal presenta un comportamiento del tipo *frecuencia portadora*. Con la finalidad de verificar lo anterior, la figura 5.10 (d) muestra la gráfica de error entre la serie original y su reconstrucción.

De igual manera, el análisis del estado z de la versión fraccional del sistema (3.7) se muestra en la figura 5.11 (a), en la figura 5.11 (b) se muestra la gráfica

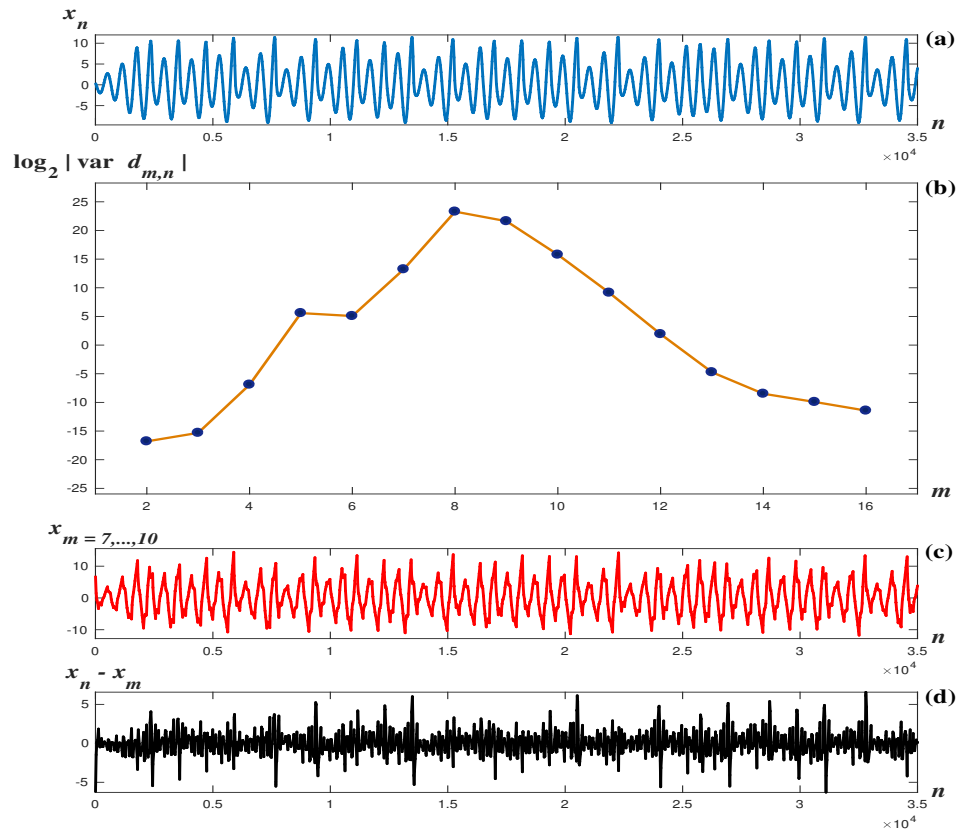


Figura 5.10: Resultados del análisis de escala del sistema caótico de Rössler.

del logaritmo de la varianza de los coeficientes con respecto a los niveles m . Se puede pensar que en el conjunto de niveles de $m = 6$ hasta $m = 10$ se presenta una alta contribución de energía debido a que al realizar la reconstrucción con dichos niveles se logra una aproximación representativa de la serie temporal de inicio, ver figura 5.11 (c). Sin embargo, el error que se obtuvo sigue siendo considerable como se ilustra en la figura 5.11 (d). De hecho, se realizó la reconstrucción de la serie temporal tomando más niveles de transformación, y a pesar de que el error disminuía aún era significativo. Lo anterior indica que la serie temporal presenta los comportamientos de *frecuencia portadora* y *ruido Gaussiano*. Sin embargo, la serie temporal presenta un comportamiento más apegado al tipo *ruido Gaussiano*.

Por último, en la figura 5.12 (a) se muestra la serie temporal del estado y del sistema hipercaótico (3.8). Por otra parte, en la figura 5.12 (b) se muestra la gráfica del logaritmo de la varianza de los coeficientes con respecto a los niveles

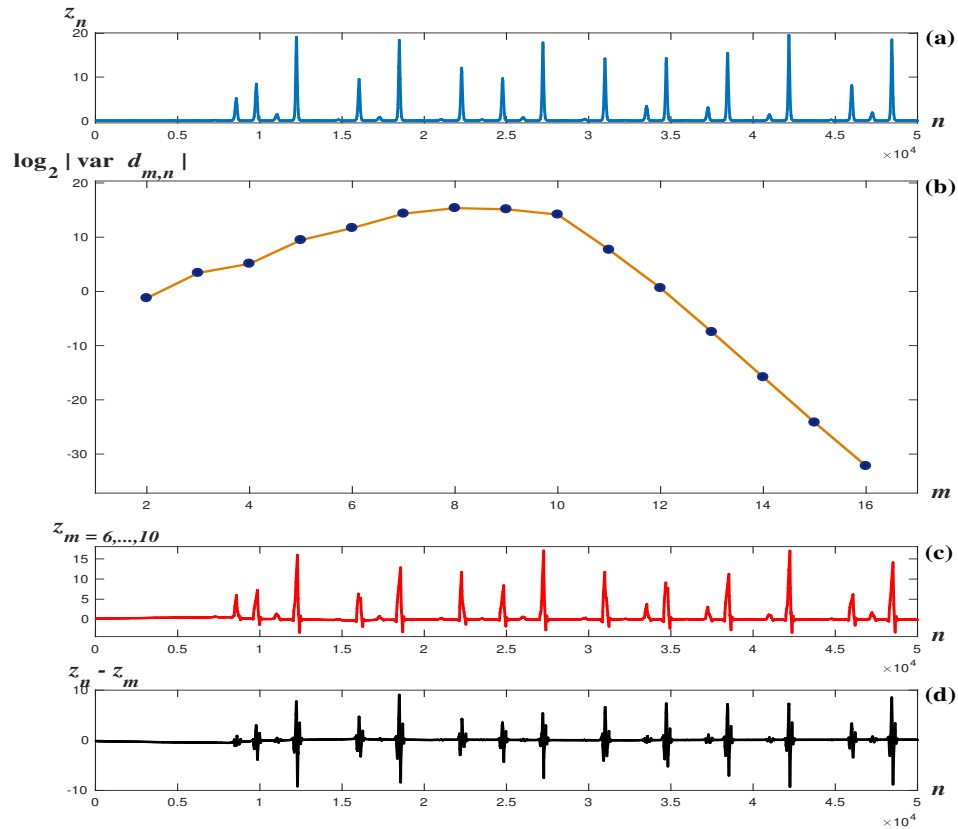


Figura 5.11: Resultados del análisis de escala del sistema caótico fraccionario de Rössler.

de transformación m . Se observa que la energía está distribuida dentro de un pequeño conjunto de niveles. De hecho, en la reconstrucción del estado, mostrada en la figura 5.12 (c), se consideraron cuatro niveles, de $m = 7$ hasta $m = 10$, por lo que se puede determinar que en el estado predomina un comportamiento del tipo *frecuencia portadora*. El error entre la serie original y su reconstrucción se ilustra en la figura 5.12 (d), con lo cual se puede verificar el tipo de comportamiento que presenta la serie temporal.

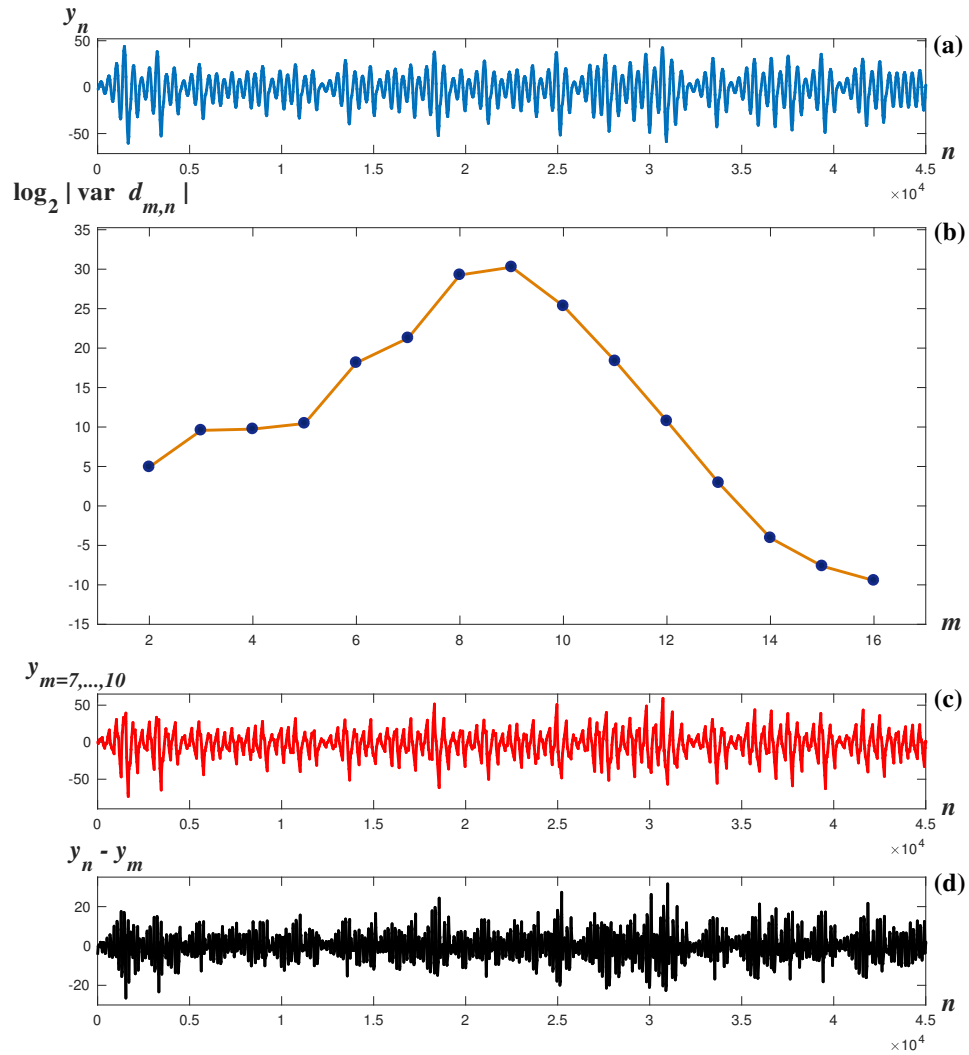


Figura 5.12: Resultados del análisis de escala del sistema hipercaótico de Rössler.

CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo fue analizar y caracterizar las series de tiempo provenientes de cuatro sistemas que presentan dinámica caótica e hipercaótica, estos sistemas son los de Chen, Chua, Lorenz y Rössler. Para el análisis y la caracterización se usó la transformada wavelet, que según la revisión bibliográfica ha resultado ser una herramienta muy útil para el procesamiento y análisis de series de tiempo.

Primero se llevó a cabo la implementación numérica de los cuatro sistemas en sus versiones caótica, caótica fraccional e hipercaótica, esto con el fin de generar la base de datos de las series temporales correspondientes. Para la implementación de los sistemas caóticos e hipercaóticos se utilizó el método de Runge-Kutta de cuarto orden; para la simulación de los sistemas caóticos fraccionales se usó la definición de derivada fraccional de Grünwald-Letnikov que fue la implementada. Para verificar el tipo de comportamiento de los sistemas se implementó un algoritmo numérico para calcular los exponentes de Lyapunov respectivos, y a partir de estos se obtuvo la dimensión de Lyapunov de cada sistema.

Después de obtener las simulaciones numéricas, usando la TWD se procedió a realizar un análisis de la distribución de la energía en los diferentes niveles de transformación de las series temporales y el análisis de escala correspondiente. Así se obtuvieron los siguientes tipos de comportamiento: (1) *frecuencia portadora* (FP), (2) *ruido Gaussiano* (RG) y (3) *fractal* (F).

Los resultados obtenidos fueron:

Sistema de Chen presenta el comportamiento del tipo *frecuencia portadora* para los estados x , y y z en los sistemas caótico y caótico fraccionario, mientras que para el estado w de la versión hipercaótica se tuvo un comportamiento del tipo

fractal.

Sistema de Chua presenta comportamiento del tipo *ruido Gaussiano* y *frecuencia portadora* en los sistemas caótico y caótico fraccionario. Por otra parte, en la versión hipercaótica predominó el comportamiento del tipo *ruido Gaussiano*, sin embargo en el estado w de la versión hipercaótica se presentó el comportamiento del tipo *fractal*.

Sistema de Lorenz presentó los comportamientos del tipo *frecuencia portadora* y *ruido Gaussiano* en las versiones caótica y caótica fraccional. En la versión hipercaótica se tuvo el comportamiento *ruido Gaussiano* en los cuatro estados.

Sistema de Rössler predomina el comportamiento del tipo *frecuencia portadora* en las tres versiones del sistema, a excepción del estado w de la versión hipercaótica del sistema que presenta comportamiento del tipo *fractal*.

En la tabla 6.1 se muestra un resumen de los resultados obtenidos en cada uno de los estados de los sistemas considerados.

Tabla 6.1

Sistemas dinámicos										
	Caóticos			Fraccionarios			Hipercaóticos			
Sistema	x	y	z	x	y	z	x	y	z	w
Chen	FP	FP	FP	FP	FP	FP	FP	FP	FP	F
Chua	FP	FP	RG	RG	FP	RG	RG	FP	RG	F
Lorenz	RG	RG	FP	RG	RG	FP	FP	FP	FP	RG
Rössler	FP	FP	FP	FP	FP	FP	FP	FP	FP	F

En algunos casos las series temporales presentaron combinación de dos tipos de comportamiento; empleando la distribución de energía en los diferentes niveles de transformación permitió establecer el tipo de comportamiento de la serie temporal.

En los resultados obtenidos se puede ver que el comportamiento fractal apareció en un sólo estado de los sistemas hipercaóticos para tres de los sistemas considerados, esto nos lleva a preguntarnos si existen o no un comportamiento de tipo fractal para sistemas de tipo caótico o caótico fraccional.

Este trabajo está basado en una aplicación de la transformada wavelet para el análisis de series de tiempo obtenidas de sistemas con diferente dinámica. Esto muestra la utilidad de esta herramienta y no depende del comportamiento del sistema. Existen otras herramientas para este análisis, sin embargo la aplicación e implementación de la transformada wavelet es sencilla y su uso no depende de la serie de tiempo a analizar.

A

CÁLCULO FRACCIONAL

El cálculo fraccional es una generalización de la integración y la diferenciación al operador fundamental de orden no entero ${}_a D_t^\alpha$, donde a y t son los límites de la integral involucrada y $\alpha \in \mathbb{R}$. Antes de introducir la definición del operador fundamental veremos un par de funciones que son de utilidad en el cálculo fraccional [30].

A.1 Funciones especiales

Una de las funciones más importante utiliza en el cálculo fraccional es la función *Gamma* (de Euler) que se define, para $s \in \mathbb{R}$, como

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt. \quad (\text{A.1})$$

En el caso particular cuando s toma sólo valores en los naturales, tenemos que

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \quad (\text{A.2})$$

Dentro del cálculo fraccional también se emplea la función de dos parámetros, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ [30],

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\text{A.3})$$

A.2 El operador integro-diferencial

La herramienta fundamental del cálculo fraccional es el operador integro-diferencial, en la literatura se pueden encontrar varias maneras de definir este

operador, entre ellas se encuentran la de Grünwald-Letnikov , la de Riemann-Lioville, y la de Caputo; se puede ver que, bajo ciertas condiciones, estas tres definiciones son equivalentes. En este trabajo nos orientamos a usar la definición de Grünwald-Letnikov dada por [30]

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ \int_a^t (d\tau)^\alpha, & \alpha < 0. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

A.3 Definición de la integral y derivada fraccional de Grünwald-Letnikov

Para definir la forma de la integral y derivada fraccional de Grünwald-Letnikov, se considera una función continua $f(t)$, tal que su primera derivada se expresa de la forma [8]

$$f'(t) \equiv \frac{d}{dt} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}, \quad (\text{A.5})$$

de acuerdo con (A.5), se puede escribir una fórmula general para n -ésima derivada de la función $f(t)$ de la forma

$$f^{(n)}(t) \equiv \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh), \quad (\text{A.6})$$

donde $n \in \mathbb{N}$.

La relación (A.6) expresa una combinación lineal de valores de la función $f(t)$. En base a esto, el calculo para los coeficientes binomiales para $n > 0$ se obtienen de la forma

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-j+1)}{j!}. \quad (\text{A.7})$$

De acuerdo con la relación (A.6), se puede definir la derivada de orden fraccional de orden α ($\alpha \in \mathbb{R}$) con respecto de t , de la forma

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh). \quad (\text{A.8})$$

En base a (A.8), la definición de derivada e integral fraccional de Grünwald-Letnikov se puede obtener, sí se hace un cambio de variable de $n = \frac{t-a}{h}$ en el límite

superior de la suma, dada por [8]

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh), \quad (\text{A.9})$$

donde a y t ($a, t \in \mathbb{R}$) son los límites de la operación para ${}_a D_t^\alpha f(t)$.

B

EXPONENTES DE LYAPUNOV

B.1 Introducción

Los exponentes de Lyapunov fueron definidos por el matemático ruso Alexander Mijailovic Lyapunov a principios del siglo XX [35]. Los exponentes de Lyapunov auxilian a caracterizar los sistemas que presentan diferente tipo de dinámica como lo es: caótica, hipercaótica, entre otras [35].

Para este trabajo, se verificará el tipo de dinámica en la cual se encuentran los sistemas presentados en la sección 3.1. Para llevar a cabo lo anterior, es importante mencionar que, si el sistema presenta una dinámica caótica, los exponentes deben ser: uno positivo, uno negativo y cero (+, -, 0). En el caso donde presente una dinámica hipercaótica, los exponentes son: dos positivos, uno negativo y cero (+, +, -, 0).

B.2 Cálculo de exponentes de Lyapunov

De forma general, los exponentes miden la distancia que existe entre dos trayectorias, las cuales divergen exponencialmente [35]. En la figura B.1 se ilustra como la distancia entre dos trayectorias se incrementa conforme el sistema evoluciona en el tiempo, ε_0 es la separación inicial entre dos puntos en diferentes trayectorias y ε_t es la separación final de las trayectorias después de un tiempo t

Debido a que la distancia entre las trayectorias tiene un comportamiento exponencial, esta se puede modelar matemáticamente como [35]:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_0 e^{\lambda t}, \tag{B.1}$$

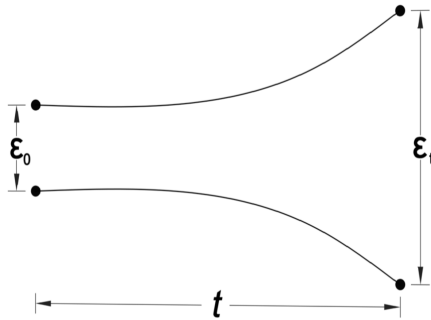


Figura B.1: Separación entre dos trayectorias cercanas de un sistema dinámico.

donde λ es el exponente de Lyapunov.

Con el fin de estimar el valor de λ en (B.1), se tiene que [35]

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \left[\frac{\epsilon_t}{\epsilon_0} \right]. \quad (\text{B.2})$$

El exponente de Lyapunov es calculado tantas veces sea necesario en diferentes lugares de la trayectoria, tomándose el promedio de estos [35]

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{t} \ln \left[\frac{\epsilon_t(i)}{\epsilon_0(i)} \right], \quad (\text{B.3})$$

donde N es el número total de iteraciones en el cual se mide la separación entre las trayectorias. En la práctica $\bar{\lambda}$ denota el promedio del exponente de Lyapunov, esté por lo general se omite, y se utiliza solamente λ [35]. Cabe mencionar, que el conjunto de exponentes de Lyapunov calculados se le conoce como el espectro de Lyapunov [35].

De manera general el cálculo de los exponentes de Lyapunov de forma analítica resulta ser difícil, por lo que se tiene que recurrir a calcularlos numéricamente.

B.3 Dimensión de Lyapunov

Los atractores de los sistemas dinámicos presentan típicamente propiedades geométricas propias de objetos fractales. Este resultado se sigue de la coexistencia simultánea de los procesos de estirado y plegado. De hecho, los exponentes de Lyapunov miden el estiramiento de las trayectorias y la dimensión fractal las propiedades geométricas resultantes de ambos procesos [36]. Debido a lo anterior,

con el fin de conocer la dimensión del atractor en términos de los exponentes de Lyapunov se cuenta con la conjetura de Kaplan-Yorke o la dimensión de Lyapunov [35]. Dicha dimensión se define como

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}, \quad (\text{B.4})$$

donde j es el entero mayor tal que cumple con $\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0$, considerando que el espectro de Lyapunov $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$ se ordena de forma decreciente, esto es, $(\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_n)$.

Bibliografia

- [1] Matouk, A. E. (2018). *Dynamics and control in a novel hyperchaotic system*. International Journal of Dynamics and Control, 1-15.
- [2] Rossler, O. E. (1979). *An equation for hyperchaos*. Physics Letters A, **71**(2-3), 155-157.
- [3] Gao, T., & Chen, Z. (2008). *A new image encryption algorithm based on hyperchaos*. Physics Letters A, **372**(4), 394-400
- [4] Lin, J. (2015). *Oppositional backtracking search optimization algorithm for parameter identification of hyperchaotic systems*. Nonlinear Dynamics, **80**(1-2), 209-219.
- [5] Smaoui, N., Karouma, A., & Zribi, M. (2011). *Secure communications based on the synchronization of the hyperchaotic Chen and the unified chaotic systems*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **16**(8), 3279-3293.
- [6] Vicente, R., Daudén, J., Colet, P., & Toral, R. (2005). *Analysis and characterization of the hyperchaos generated by a semiconductor laser subject to a delayed feedback loop*. IEEE Journal of Quantum Electronics, **41**(4), 541-548.
- [7] Xin, P. U., TIAN, X. J., ZHAI, H. Y., Liang, Q. I. A. O., LIU, C. Y., & CUI, Y. Q. (2013). *Simulation study on hyperchaos analysis of reforming system based on single-ring erbium-doped fiber laser*. The Journal of China Universities of Posts and Telecommunications, **20**(5), 117-121.
- [8] Podlubny, Igor. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. **198**. Elsevier, 1998.
- [9] Bagley, R. L., & Calico, R. A. (1991). *Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, **14**(2), 304-311.

- [10] Sun, H. H., Abdelwahab, A., & Onaral, B. (1984). *Linear approximation of transfer function with a pole of fractional power*. IEEE Transactions on Automatic Control, **29**(5), 441-444.
- [11] Ichise, M., Nagayanagi, Y., & Kojima, T. (1971). *An analog simulation of non-integer order transfer functions for analysis of electrode processes*. Journal of Electroanalytical Chemistry and Interfacial Electrochemistry, **33**(2), 253-265.
- [12] Li, C., & Chen, G. (2004). *Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, **341**, 55-61.
- [13] Li, C., & Chen, G. (2004). *Chaos in the fractional order Chen system and its control*. Chaos, Solitons & Fractals, **22**(3), 549-554.
- [14] Grigorenko, I., & Grigorenko, E. (2006). *Erratum: Chaotic Dynamics of the Fractional Lorenz System* [Phys. Rev. Lett. 91, 034101 (2003)]. Physical Review Letters, **96**(19), 199902.
- [15] Mallat, S. (1999). *A wavelet tour of signal processing*. Elsevier.
- [16] Murguía, J. S., Rosu, H. C., Reyes-López, L. E., Mejía-Carlos, M., & Vargas-Olmos, C. (2018). *Wavelet characterization of hyper-chaotic time series*. Revista Mexicana de Física, **64**(3), 283-290.
- [17] Murguía, J. S., & Rosu, H. C. (2011). *Discrete wavelet analyses for time series*. In Discrete Wavelet Transforms-Theory and Applications. InTech.
- [18] Staszewski, W. J., & Worden, K. (1999). *Wavelet analysis of time-series: coherent structures, chaos and noise*. International Journal of Bifurcation and Chaos, **9**(03), 455-471.
- [19] Wornell, G. W., & Oppenheim, A. V. (1992). *Wavelet-based representations for a class of self-similar signals with application to fractal modulation*. IEEE Transactions on Information Theory, **38**(2), 785-800.
- [20] Campos-Cantón, E., Murguía, J. S., & Rosu, H. C. (2008). *Chaotic dynamics of a nonlinear electronic converter*. International Journal of Bifurcation and Chaos, **18**(10), 2981-3000.

- [21] Murguía, J. S., & Campos-Cantón, E. (2006). *Wavelet analysis of chaotic time series*. Revista Mexicana de Física, **52**(2), 155-162.
- [22] Shen, C., Yu, S., Lü, J., & Chen, G. (2015). *Constructing hyperchaotic systems at will*. International Journal of Circuit Theory and Applications, **43**(12), 2039-2056.
- [23] Chen, G., & Ueta, T. (1999). *Yet another chaotic attractor*. International Journal of Bifurcation and chaos, **9**(07), 1465-1466.
- [24] En-Zeng, D., Zeng-Qiang, C., Zai-Ping, C., & Jian-Yun, N. (2012). *Pitchfork bifurcation and circuit implementation of a novel Chen hyper-chaotic system*. Chinese Physics B, **21**(3), 030501.
- [25] Lu, J. G., & Chen, G. (2006). *A note on the fractional-order Chen system*. Chaos, Solitons & Fractals, **27**(3), 685-688.
- [26] Chua, L. O., Wu, C. W., Huang, A., & Zhong, G. Q. (1993). *A universal circuit for studying and generating chaos. I. Routes to chaos*. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, **40**(10), 732-744.
- [27] Petráš, I. (2008). *A note on the fractional-order Chua's system*. Chaos, Solitons & Fractals, **38**(1), 140-147.
- [28] Rech, P. C., & Albuquerque, H. A. (2009). *A hyperchaotic Chua system*. International Journal of Bifurcation and Chaos, **19**(11), 3823-3828.
- [29] Lorenz, E. N. (1963). *Deterministic nonperiodic flow*. Journal of the atmospheric sciences, **20**(2), 130-141.
- [30] Petráš, I. (2011). *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*. Springer Science & Business Media.
- [31] Li, C., & Yan, J. (2007). *The synchronization of three fractional differential systems*. Chaos, Solitons & Fractals, **32**(2), 751-757.
- [32] Rössler, O. E. (1976). *An equation for continuous chaos*. Physics Letters A, **57**(5), 397-398.

-
- [33] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., & Vastano, J. A. (1985). *Determining Lyapunov exponents from a time series*. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **16**(3), 285-317.
- [34] Danca, M. F., & Kuznetsov, N. (2018). *Matlab Code for Lyapunov Exponents of Fractional-Order Systems*. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **28**(05), 1850067.
- [35] Addison, P. S. (1997). *Fractals and chaos: an illustrated course*. CRC Press.
- [36] Solé, R. V., & Manrubia, S. C. (2001). *Orden y caos en sistemas complejos* (Vol. 1). Univ. Politèc. de Catalunya.