

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ



FACULTAD DE CIENCIAS

**“SOBRE LA COMPLEJIDAD DE
RESOLUCIONES DE TANGLES”**

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN CIENCIAS APLICADAS

PRESENTA:

ANDREA ESMERALDA ALBA CASILLAS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. GELASIO SALAZAR ANAYA

SAN LUIS POTOSÍ, SAN LUIS POTOSÍ

JULIO 2020

DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD DE LA TESIS

Yo, Andrea Esmeralda Alba Casillas, estudiante del Posgrado en Ciencias Aplicadas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, como autora de la tesis “Sobre la complejidad de resoluciones de tangles”, declaro que la tesis es una obra original, inédita, auténtica, personal, que se han citado las fuentes correspondientes y que en su ejecución se respetaron las disposiciones legales vigentes que protegen los derechos de autor y de propiedad intelectual e industrial. Las ideas, doctrinas, resultados y conclusiones a los que he llegado son de mi absoluta responsabilidad.

Resumen

A partir del trabajo de Kouki Taniyama a fines de los 1980s, se sabe que las sombras que no se resuelven en los nudos 3_1 , 4_1 , 5_1 , y 5_2 tienen una estructura muy simple. En particular, para cada entero positivo n existe un polinomio $f(n)$ tal que existen a lo más $f(n)$ sombras con n vértices que no se resuelven en estos nudos. Demostramos que este comportamiento, para tangles, no se cumple en general y en particular para la tangle racional $[1, 4]$.

Palabras clave: Sombras de tangles, meanders, tangles, tangles primos, tangles racionales.

Abstract

From the work of Kouki Taniyama in the late 1980s, the unsolved shadows at knots 3_1 , 4_1 , 5_1 , and 5_2 are known to have a very simple structure. In particular, for each positive integer n there is a polynomial $f(n)$ such that there are at most $f(n)$ shadows with n vertices that do not resolve at these nodes. We demonstrate that, for tangles, this behavior is not fulfilled in general and in particular for the rational tangle $[1, 4]$.

Keywords: Tangles shadows, meanders, tangles, prime tangles, rational tangles.

Agradecimientos

A través de estas líneas quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que con su soporte científico y humano han colaborado en la realización de este trabajo.

Le agradezco principalmente a Dios, que me brindó la fuerza para continuar en este proceso de obtener uno de los anhelos más deseados.

Quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) de México por los apoyos que me brindó en estos dos años de mi maestría, sin los cuáles no me hubieran permitido finalizarla.

Agradezco a la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, que me brindó todo el apoyo durante mi estancia.

A mi director de tesis, el Dr. Gelasio Salazar Anaya, por la orientación, la paciencia y soporte que me permitió realizar esta tesis.

Agradezco a la Dra. Carolina Medina Graciano por su ayuda en los inicios de este trabajo.

A los doctores del Instituto de Física, por el ambiente de trabajo y por el apoyo que me brindaron en estos años, en especial a los doctores Edgardo Ugalde, Felipe García-Ramos, Rafael Alcaraz, Francisco López y César Hernández.

De mis compañeros de maestría, agradezco especialmente a Brenda Guevara por los buenos momentos que compartimos. A los amigos y compañeros de maestría por su simpatía: Carlos, Irma, Victor, Karla, Marisol.

A mis amigos Hugo Montiel, Jacky Santiago, Marco Torres, Brenda Perea, Pamela Ramírez, Brisaida Martínez y Ana Laura. Su apoyo y comprensión fueron importantes durante estos años. Un agradecimiento especial a Paloma Ramírez y su familia que me abrieron las puertas de su hogar.

Agradezco a mi familia por su comprensión, comunicación y apoyo.

A mis hermanos Bety Alba y Ricardo Alba, quienes me hicieron pasar ratos agradables, por estar siempre presentes y por el apoyo moral que me brindaron.

Y finalmente a mis padres Guillermo Alba y Beatriz Casillas por su cariño y el enseñarme a nunca darme por vencida. Me han brindado todo su cariño, apoyo y aliento durante estos dos años, sin ustedes no hubiera llegado tan lejos, los quiero mucho.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Sombras de nudos: la pregunta fundamental	1
1.2. Algunos resultados sobre la Pregunta 1.1.2 para nudos pequeños	2
1.3. Aspectos algorítmicos y el objetivo principal	3
1.4. Nuestros resultados	4
2. Antecedentes y motivación	6
2.1. Demostración del Lema 2.1 para el nudo 5_1	7
3. Herramientas de tangles	10
3.1. Nociones básicas de tangles	10
3.2. Las herramientas principales	13
4. Demostraciones de los teoremas 1.1 y 1.2	15
4.1. Demostración del Teorema 1.1	15
4.2. Demostración del Teorema 1.2	20

pre:1 **Pregunta 1.1.1.** Sea K un nudo y S una sombra. ¿Qué tan difícil es determinar si se puede resolver S en K ?

Esta pregunta tiene una respuesta afirmativa cuando K es el nudo trivial. Demostrar esto es un ejercicio razonablemente elemental, pero no trivial (ver por ejemplo [1]). Así, surge la pregunta de qué se puede decir cuando K es un nudo no trivial.

Hakani [4] nos dice que es una pregunta común ya que tiene muchas aplicaciones, en especial en la biología (ADN). Pero también nos motiva en un ejemplo en particular. De hecho, el artículo de Hanaki se centra en un ejemplo en particular de la siguiente pregunta. Fijemos una sombra S y fijemos un nudo K . ¿Puede S resolverse en K ? Idealmente, existiría un algoritmo eficiente para responder esta pregunta. Tal algoritmo no se conoce.

Exploremos cómo podríamos generar un algoritmo para examinar la pregunta (sin preocuparnos por su eficiencia). Empecemos con un sombra fija S y un nudo fijo K . Lo primero que pedimos en el algoritmo es que obtenga todos los posibles diagramas que se obtienen al asignar la información arriba/abajo a cada cruce. Entonces si tenemos una sombra con, por ejemplo, 40 cruces, el número de diagramas que obtenemos es 2^{40} . Suponiendo que tenemos todas las herramientas computacionales necesarias, obtener todos los diagramas tomará mucho tiempo. Pero supongamos que ya tenemos todos los posibles diagramas, solamente para continuar la discusión, ignorando esta ya enorme dificultad.

Para cada uno de los 2^{40} diagramas debemos verificar si este nudo es isotópico a K , es decir, si alguno de los 2^{40} diagramas se pueden deformar hasta llegar al nudo K . Aquí es donde se presenta un problema complicado, pues incluso si K es el nudo trivial, tomó décadas encontrar un algoritmo para resolver este problema (algoritmo que, vale la pena señalar, es muy ineficiente). En 1961, Wolfgang Haken [3] presenta un procedimiento para decidir cuando un nudo dado es o no el nudo trivial. En décadas posteriores se han logrado encontrar algoritmos alternativos, pero hasta ahora todos ellos son *ineficientes*: dado un diagrama de un nudo con n cruces, el tiempo que toma correr el algoritmo para decidir si este nudo es trivial, es exponencial en n .

Así, aún ignorando el problema de que tenemos 2^{40} diagramas por verificar, para cada uno de ellos debemos verificar si este diagrama corresponde al nudo K —y esto es ya enormemente difícil si K es el nudo trivial. A partir de estas observaciones concluimos que intentar resolver este problema por la fuerza bruta es fútil.

Surge entonces la siguiente pregunta, que es una variante en principio más sencilla que la Pregunta 1.1.1.

pre:2 **Pregunta 1.1.2.** Sea K un nudo fijo. Si se nos presenta una sombra S . ¿Qué tan difícil es determinar si se puede resolver S en K ?

Este trabajo es motivado por esta última pregunta.

1.2. Algunos resultados sobre la Pregunta 1.1.2 para nudos pequeños

En 1989, motivado por la búsqueda de un orden parcial en el conjunto de todos los nudos, Taniyama caracterizó cuándo una sombra S se puede resolver en el nudo 3_1 (el nudo trébol),

el nudo 4_1 (el nudo figura-ocho), y los nudos 5_1 y 5_2 . (Utilizamos la notación de Rolfsen para identificar los nudos [8].) Este resultado fue también presentado en [7]. Muy recientemente, Takimura [9] obtuvo una caracterización para el nudo 6_2 . El artículo de Takimura es altamente

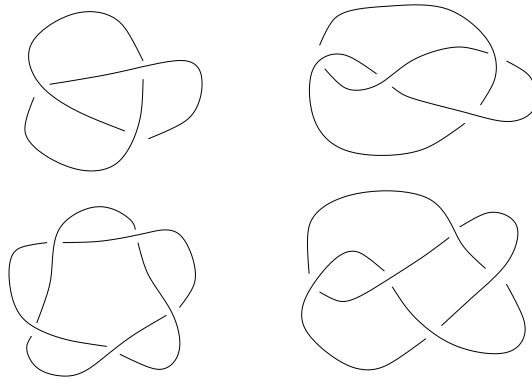


Figura 1.2: Los nudos 3_1 , 4_1 , (arriba respectivamente) 5_1 y 5_2 (abajo respectivamente).

figu33

técnico y largo, y esto hace pensar que aún si es posible obtener caracterizaciones similares para otros nudos (o incluso para todos los nudos), este proceso se volvería enormemente largo y complicado.

Con esto en mente, centramos nuestra atención en la Pregunta 1.1.2. Esta pregunta no debe interpretarse como la existencia de una caracterización de las sombras que se resuelven en un nudo en particular, sino acerca de la *dificultad* de responder lo siguiente: dado un nudo fijo K , si nos presentan una sombra S , ¿existe un algoritmo eficiente que decide si S se resuelve en K ? Esto es, nos interesa el aspecto algorítmico del problema. ¿Existe un algoritmo *eficiente* para este problema, para cada nudo K ? (Recordamos que, informalmente, un algoritmo es eficiente si para dar la respuesta toma un número de pasos acotado por un polinomio evaluado en el tamaño del objeto presentado).

Como comentamos en el siguiente capítulo, las caracterizaciones de Taniyama y Takimura *implican* la existencia de un algoritmo eficiente para resolver la Pregunta 1.1.2, en el caso de que el nudo K es 3_1 , 4_1 , 5_1 , 5_2 , o 6_2 .

Dado este éxito para nudos pequeños, es natural preguntarse si algo similar ocurre para *todos* los nudos:

pre:3 **Pregunta 1.2.1.** Sea K un nudo fijo. ¿Existe un algoritmo eficiente que decide, dada una sombra S , si S se resuelve en K ?

1.3. Aspectos algorítmicos y el objetivo principal

En este trabajo presentamos evidencia de que, en general, no es muy razonable esperar una respuesta afirmativa a esta última pregunta. Tomamos como punto de partida la siguiente pregunta, que es la versión de la Pregunta 1.2.1 para tangles.

pre:4 **Pregunta 1.3.1.** Sea T una tangle fija. ¿Existe un algoritmo eficiente que decide, dada una sombra de tangle S , si S se resuelve en T ?

Este enfoque en tangles surgió porque precisamente la herramienta fundamental para las caracterizaciones de Taniyama y Takimura es la investigación de la Pregunta 1.3.1: a través del estudio de resolución de sombras (de tangles) en tangles, Taniyama y Takimura fueron capaces de lograr sus caracterizaciones para nudos.

En el Capítulo 3 recordamos la definición formal de una tangle. Para esta discusión preliminar, recordamos que una tangle (2-tangle, en nuestro caso) es una pareja (B, t) , donde B es una 3-bola y t son dos arcos simples que no se intersectan, y tal que la intersección de cada arco con la frontera de la bola consiste de dos puntos.

Nuestro proyecto consistió en explorar objetos (nudos o tangles) que no poseyeran caracterizaciones similares a las encontradas por Taniyama y Takimura. Como hemos mencionado, estas caracterizaciones (para los nudos $3_1, 4_1, 5_1, 5_2$ y 6_2) son particularmente sencillas, en el siguiente sentido. Digamos que el *orden* de una sombra es su número de (auto)cruces. Tomemos por ejemplo al nudo 5_1 , que es el nudo toroidal $T_{2,5}$. A partir de la caracterización de Taniyama, sabemos que una sombra S se resuelve en 5_1 si y solo si S *no* es la sombra de un nudo pretzel del tipo $P(p_1, p_2, p_3)$, donde p_1, p_2, p_3 son enteros impares. Una cuenta elemental demuestra lo siguiente: *dado un entero n , existen a lo más n^3 sombras de orden n que no se resuelven en 5_1 .*

Este último enunciado revela la existencia de un algoritmo eficiente para decidir si una sombra dada se resuelve o no en 5_1 : hay “muy pocas” sombras de orden n que no se resuelven en 5_1 , y basta entonces checar si nuestra sombra se encuentra en esta colección. Resultados análogos se cumplen para $3_1, 4_1, 5_2$, y 6_2 .

Como eje de nuestro proyecto, nos propusimos encontrar objetos (nudos o tangles) que *no* tuvieran esta propiedad. Centrándonos en tangles, nuestro propósito fue el siguiente.

Objetivo Principal. *Encontrar una tangle T tal que el número de sombras de orden n que no se resuelven en T crece exponencialmente con n .*

1.4. Nuestros resultados

Cumplimos el Objetivo Principal investigando la tangle racional $[1, 4]$, ilustrada en la Figura 1.3.

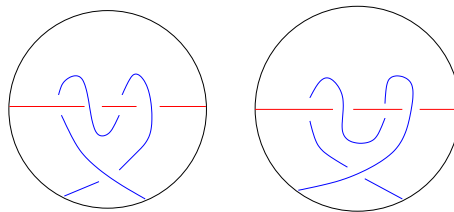


Figura 1.3: Las tangles $[1, 4]$ (izquierda) y $[-1, 4]$ (derecha).

fig:30-1

Incluso demostramos algo más fuerte. Una sombra de tangle es *meándrica* si los dos arcos que forman la tangle son simples. Las sombras meándricas son las más sencillas posibles. Por ejemplo, las sombras correspondientes a los tangles en la Figura 1.3 (que se obtienen eliminando la información arriba/abajo de los cruces) son meándricas: el arco rojo no se autocruza y en

la Figura 1.3 se puede observar un autocruce del arco azul, pero con movidas de Reidemeister podemos hacer que el arco azul no se autocruce.

Resolvimos el objetivo anterior para la tangle racional $[1, 4]$, demostrando que la propiedad se cumple incluso para la familia restringida de sombras meándricas.

Nuestro principal resultado es el siguiente, demostrado en el Capítulo 4.

thm:main1 **Teorema 1.1.** *Existe una constante $c > 1$ con la siguiente propiedad. Para todo entero $n \geq 3$, existen c^n sombras meándricas que no se resuelven en la tangle $[1, 4]$.*

Adicionalmente, concretamos una caracterización para las sombras meándricas que se resuelven en la tangle $[-1, 4]$, también ilustrada en la Figura 1.3. Una sombra meándrica es *monótona* si es del tipo ilustrado en la Figura 1.4. Una descripción formal es ciertamente posible, pero parece igualmente válido y mucho más intuitivo describir esto informalmente. Uno de los arcos (digamos el *rojo*) que forman a la sombra va del “extremo noroeste” al “extremo noreste”, y el otro arco (digamos el *azul*) va del del “extremo suroeste” al “extremo noreste”. Siguiendo estas orientaciones, al recorrer el arco rojo encontramos sus cruces con el arco azul en orden x_1, \dots, x_k , y lo mismo sucede al recorrer el arco azul.

thm:main2 **Teorema 1.2.** *Una sombra meándrica de tangle se resuelve en la tangle $[-1, 4]$ si y solo si no es monótona.*

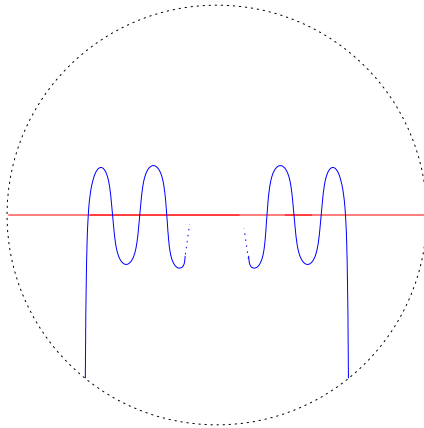


Figura 1.4: Las sombras de tangles que no se resuelven en $[-1, 4]$.

Capítulo 2

Antecedentes y motivación

cedentes

Como narramos en la Introducción, una motivación importante para este trabajo es el siguiente enunciado.

Lema 2.1. *Si $K \in \{3_1, 4_1, 5_1, 5_2, 6_2\}$, entonces existe un algoritmo eficiente que toma una sombra S y decide si S se resuelve en K .*

La razón de la motivación es que, como también lo hemos comentado, esto nos lleva a preguntarnos lo siguiente (Pregunta 1.2.1.) Sea K un nudo fijo. ¿Existe un algoritmo eficiente que decide, dada una sombra S , si S se resuelve en K ?

Revisitando lo comentado en la Introducción, la existencia de un algoritmo eficiente para los nudos en el Lema 2.1 descansa en la existencia de caracterizaciones de qué sombras *no* se resuelven en cada uno de estos nudos. *Existen “pocas” (un número polinomial en n) sombras que tienen esta característica.* El problema entonces se reduce a verificar si nuestra sombra es exactamente una de estas sombras “prohibidas”. La verificación para cada sombra puede hacerse en tiempo polinomial en n . Combinando esto con la observación anterior, como veremos a continuación, el Lema 2.1 se sigue inmediatamente.

Nuestro punto de vista de ataque a esta pregunta se centró en tangles, pues son utilizadas extensivamente por Taniyama en [10]. Nuestro objetivo, como hemos mencionado, fue demostrar que este fenómeno (la existencia de pocas “sombras” que *no* se resuelven en una tangle dada fija) en general no se cumple. Esto apunta a la dificultad de encontrar un algoritmo eficiente, sugiriendo una respuesta negativa a la Pregunta 1.3.1 (la versión de la Pregunta 1.2.1 para tangles).

En la siguiente subsección demostramos el Lema 2.1 para el caso del nudo 5_1 . Esta demostración da idea de la técnica general. Presentamos este caso pues es el más difícil de los cinco nudos en el Lema 2.1, pues las sombras que *no* se resuelven en 5_1 son, como veremos a continuación, claramente más complejas que las sombras que *no* se resuelven en 3_1 , que las sombras que *no* se resuelven en 4_1 , y que las sombras que *no* se resuelven en 5_2 . La caracterización de las sombras que *no* se resuelven en 6_2 es un poco más elaborada, pero los argumentos presentados en la siguiente sección fácilmente se extienden a este caso.

2.1. Demostración del Lema 2.1 para el nudo 5_1

Para demostrar el Lema 2.1 para el nudo 5_1 , el primer paso es acordar una convención sobre cómo se nos presenta una sombra. Notamos que es posible considerar una sombra (una curva cerrada) como una gráfica plana 4-regular, esto es, una gráfica dibujada en el plano sin cruces, tal que todos sus vértices tienen grado 4. Con esta perspectiva, podemos hablar de nociones como la existencia (o no) de vértices de corte en una sombra.

Los vértices de corte son bastante irrelevantes en una sombra. Si tenemos un vértice de corte v en una sombra S , podemos transformar S en otra sombra S' de la siguiente manera. Consideramos dos curvas de Jordan γ_1 y γ_2 que cruzan a la sombra únicamente en v , de manera que la unión del interior de estas curvas contiene a toda la sombra. Hacemos una operación de flip en una de estas dos regiones, y eliminamos el vértice de corte, uniendo de manera natural las aristas incidentes con v . La sombra S' así obtenida tiene las mismas *propiedades de resolución* que S : S se resuelve en K si y solo si S' se resuelve en K . Aplicando iterativamente esta operación, obtenemos una sombra \bar{S} con las mismas propiedades de resolución que S , tal que \bar{S} no tiene vértices de corte. Por esta razón, *podemos asumir que todas las sombras de nudos bajo consideración no tienen vértices de corte*.

Comenzamos presentando los resultados de Taniyama [10], aunque únicamente trabajaremos con la caracterización para sombras que no se resuelven en el nudo 5_1 . No presentamos el resultado de Takimura pues, aunque es del mismo espíritu, el enunciado es más largo y técnico.

1. Cualquier sombra S con al menos un vértice se resuelve en 3_1 .
2. Una sombra S *no* se resuelve en 4_1 si y solo si S es la sombra del diagrama usual $(2, p)$ -toro para algún $p \geq 3$.
3. Una sombra S *no* se resuelve en 5_1 si y solo si S es la sombra del diagrama usual de un nudo pretzel $L(p_1, p_2, p_3)$ con p_1, p_2, p_3 enteros impares (ver Figura 2.1).
4. Una sombra S *no* se resuelve en 5_2 si y solo si S es o bien la sombra del diagrama usual del $(2, p)$ -toro con $p \geq 3$, o la sombra del diagrama usual del nudo 4_1 .

Para dar los argumentos que demuestran el Lemma 2.1 en el caso de $K = 5_1$, volvemos primero al asunto de en qué manera se nos presenta la sombra. Para esto, recordamos algunas nociones de teoría topológica de gráficas. Un *sistema de rotación* codifica encajes de grafos en superficies orientables, describiendo con una función ρ el orden cíclico (digamos en el sentido del reloj) en el que las aristas salen de cada vértice del encaje. Por ejemplo, el encaje en la Figura 2.2 se codifica utilizando $(\rho(1), \rho(2), \rho(3), \rho(4))$, donde estas cuatro rotaciones cíclicas son las siguientes:

$$\rho(1) = 244, \quad \rho(2) = 341, \quad \rho(3) = 42, \quad \rho(4) = 1123.$$

Asumimos entonces que se nos presenta una sombra describiendo su encaje (como gráfica plana) con un sistema de rotación. Denotemos los vértices como a_1, \dots, a_n . Así, el sistema de rotación es de la forma $(\rho(a_1), \dots, \rho(a_n))$.

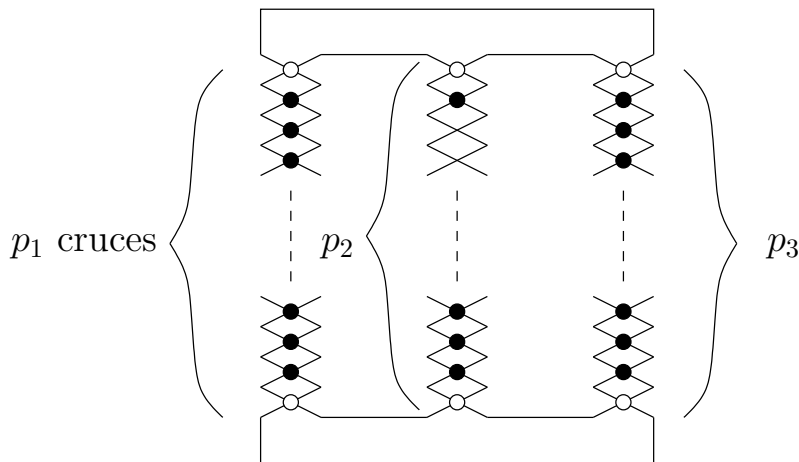


Figura 2.1: La sombra típica del nudo pretzel $P(p_1, p_2, p_3)$. En esta discusión nos interesan estas sombras en el caso en el que p_1, p_2 , y p_3 son impares.

fig:90-1

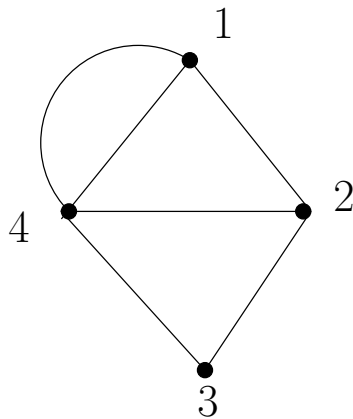


Figura 2.2: Encaje de una gráfica en el plano.

fig:4b

Demostración del Lema 2.1 para el nudo 5_1 . Supongamos que se nos presenta una sombra S , y se nos pregunta si S , como gráfica plana, es equivalente a la sombra $S(p_1, p_2, p_3)$ del pretzel $P(p_1, p_2, p_3)$ (con p_1, p_2, p_3 impares, como asumimos en el centro de la demostración). Sea n el número de vértices de n . Evidentemente, si n es par no hay necesidad de ir más allá: ya que el número de vértices de $S(p_1, p_2, p_3)$ es impar.

A partir de la Figura 2.1, es evidente que $S(p_1, p_2, p_3)$ tiene seis vértices *distinguidos*: estos tienen interior blanco en la figura. Lo que distingue a estos vértices es que todos los demás vértices (los *comunes*) tienen un sistema de rotación del tipo $(bbgg)$. En cambio, el sistema de rotación de los vértices distinguidos es del tipo $(aacd)$, donde c y d son asimismo vértices distinguidos.

Más aún: estos seis vértices distinguidos se dividen naturalmente en dos grupos (los de la parte superior y los de la parte inferior, en la figura). Si uno de estos grupos es $\{b, c, d\}$, entonces (posiblemente después de una re-etiquetación) tenemos que $\rho(b) = aacd$, $\rho(c) = eebd$, y $\rho(d) = bcff$, donde a, e, f son vértices no distinguidos. Algo totalmente análogo ocurre con los vértices del grupo inferior.

Comenzamos el algoritmo verificando que existen exactamente 6 vértices del tipo distinguido, y $n - 6$ vértices del tipo común. Esto puede hacerse en a lo más n^6 pasos: basta checar cada conjunto de 6 vértices, y verificar (lo cual se puede hacer en tiempo constante) si son un conjunto de vértices distinguidos, y verificar asimismo (lo cual también puede hacerse en tiempo constante) si los $n - 6$ vértices restantes son del tipo común. Si la respuesta a esta pregunta es negativa, entonces sabemos que S no es equivalente a $S(p_1, p_2, p_3)$ (para ningún conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ de enteros impares), y detenemos el algoritmo con una respuesta negativa.

Asumimos que la respuesta es afirmativa. Notamos que para que S sea $S(p_1, p_2, p_3)$, se requiere que cada vértice distinguido “superior” esté naturalmente emparejado con un vértice distinguido “inferior”. Informalmente, este par de vértices forman los extremos de una de las “torres”, que tienen p_1, p_2 , y p_3 vértices, respectivamente.

Trivialmente, hay seis posibles emparejamientos. Intentamos cada uno de los seis posibles emparejamientos y, para cada una de estas posibilidades, continuamos con el siguiente paso.

Este paso consiste en lo siguiente. Supongamos que tenemos un vértice superior u y un vértice inferior v , y nos preguntamos si son los extremos de una torre de p vértices, con p impar. Es fácil ver que verificar esto puede hacerse de manera muy eficiente. Empezamos viendo cuál es el vértice común adyacente con u . Continuamos explorando este vértice común descubierto, e iteramos el procedimiento hasta encontrar un vértice adyacente con un vértice distinguido. Si este vértice es v , este proceso ha tenido éxito y continuamos con la siguiente pareja de vértices distinguidos. Si este vértice no es v , descartamos a la pareja (u, v) como parte de un candidato de emparejamiento.

Si este proceso tiene éxito, procedemos de la misma manera con la siguiente pareja de vértices, uno superior y uno inferior. Nuevamente vemos si estos son los extremos de una torre con q vértices, con q impar, repitiendo el procedimiento anteriormente descrito para ver si u y v eran los extremos de una torre con p vértices. Si la respuesta es negativa, descartamos la propuesta de emparejamiento superior/inferior. Si la respuesta es afirmativa, continuamos el proceso con la tercer y última pareja que consiste de un vértice superior y uno inferior.

Repetimos entonces este proceso una tercera vez. Si no tiene éxito (el tercer vértice superior y el tercer vértice inferior son los extremos de una torre con r vértices, con r impar), entonces sabemos que la sombra no corresponde a $S(p_1, p_2, p_3)$, para ningún conjunto de valores p_1, p_2, p_3 impares. Si tiene éxito, entonces hemos asegurado que la sombra S inicialmente recibida es $S(p, q, r)$ con p, q, r impares.

Este proceso se realiza a lo más seis veces, que es el número de maneras de emparejar los vértices superiores con los vértices inferiores. Si al final del proceso no se tuvo éxito, entonces la respuesta es: S no es $S(p_1, p_2, p_3)$ para p_1, p_2, p_3 impares y, entonces, por la caracterización descrita anteriormente para 5_1 , se sigue que S sí se puede resolver en 5_1 . Si el proceso se detuvo sin éxito, entonces la respuesta es: S sí es $S(p_1, p_2, p_3)$ para p_1, p_2, p_3 impares, y entonces nuevamente utilizando la caracterización concluimos que S no se puede resolver en 5_1 .

Claramente, este proceso lleva un número polinomial de pasos como función de n . Como este algoritmo finaliza determinando si S se resuelve en 5_1 , es entonces un algoritmo eficiente para determinar si una sombra S arbitraria se puede o no resolver en 5_1 . \square

Capítulo 3

Herramientas de tangles

Definiciones

En el trabajo seminal [2], Conway utilizó tangles para obtener una clasificación de nudos con pocos cruces, y definió la fracción de un tangle racional utilizando fracciones continuas.

En [5], Lickorish y Kirby definen e investigan la noción de un tangle *primo*. Asimismo Lickorish [6] demostró un teorema que enuncia que la suma de dos tangles primos es un tangle primo, y si un tangle tiene un subtangle primo, entonces el tangle es primo. Estos resultados son centrales para el presente trabajo.

3.1. Nociones básicas de tangles

Para fijar ideas, recordamos algunas definiciones relevantes.

Definición 3.1. Un *enlace* es la imagen de un encaje de una unión disjunta de círculos no orientados y no ordenados en S^3 . Un *nudo* es un enlace con una componente.

Definición 3.2. Una *sombra* de un enlace es la imagen de un mapeo de una unión disjunta finita de círculos a S^2 donde sus múltiples puntos son solamente cruces transversales. Cada clase de equivalencia de enlaces es llamada un *tipo de enlace*.

Definición 3.3. Sea K un nudo. Un *diagrama* es una proyección sobre el plano, en el cuál a cada cruce se le asigna información arriba/abajo.

Definición 3.4. Un *tangle* es un par (B, t) donde B es una 3-bola y t es un par de arcos disjuntos en B con $t \cap \partial B = \partial t$. Dos tangles $T_1 = (B_1, t_1)$ y $T_2 = (B_2, t_2)$ son *equivalentes* si existe una deformación isotópica de $D^2 \times [0, 1]$ fija en $\partial(D^2 \times [0, 1])$ que deforma a T_1 en T_2 .

Definición 3.5. Un tangle es *racional* si podemos obtenerlo de un número finito de giros horizontales y verticales consecutivos de la vecindad de los puntos finales de los tangles elementales $[0]$ y $[\infty]$.

Los tangles más simples son los tangles $[0]$, $[\infty]$, $[+1]$ y $[-1]$, estos se ilustran en la Figura 3.1. Un ejemplo de un tangle racional se ilustra en la Figura 3.2.

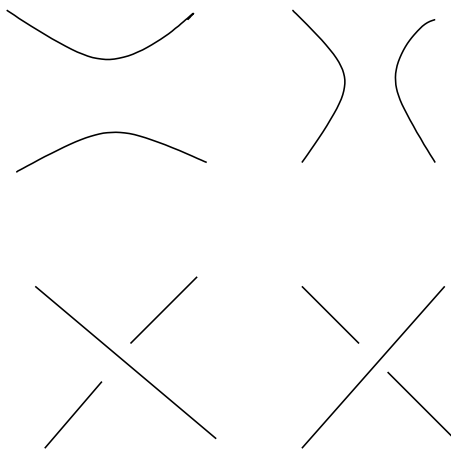


Figura 3.1: $[0]$, $[\infty]$, (arriba respectivamente) $[+1]$ y $[-1]$ (abajo respectivamente).

rational

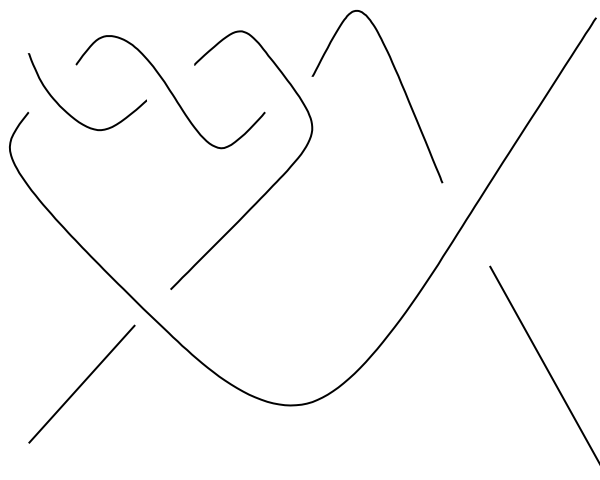


Figura 3.2: Ejemplo de un tangle racional

tangle

Definición 3.6. Una *fracción continua* en un tangle entero es una descripción algebraica racional por una fracción continua construida por los tangles $[a_1], [a_2], \dots, [a_n]$ con todos los numeradores iguales a 1:

$$[[a_1], [a_2], \dots, [a_n]] = [a_1] + \frac{1}{[a_2] + \dots + \frac{1}{[a_{n-1}] + \frac{1}{[a_n]}}}. \quad (3.1)$$

eq:eq1

Definición 3.7. Sea T un tangle racional isotópico a la fracción continua de $[[a_1], \dots, [a_n]]$. Definimos la fracción $F(T)$ de T como el valor numérico de la fracción continua obtenida sustituyendo enteros para el tangle entero en la expresión para T , ecuación, (3.1).

Definición 3.8. Dos tangles T, S , en B^3 son *isotópicos*, y escribimos $S \sim T$, si tienen configuraciones idénticas de sus cuatro puntos finales en la frontera S^2 de la 3-bola, y hay una isotopía ambiente de (B^3, T) a (B^3, S) que es la identidad en la frontera $(S^2, \partial T) = (S^2, \partial S)$. Una isotopía ambiente puede imaginarse como una deformación continua de B^3 fijando los cuatro puntos finales en la frontera de la esfera y llevando un tangle a otro sin causar auto-intersecciones.

Desde el punto de vista topológico, dos tangles isotópicos son indistinguibles entre sí. Por esta razón simplemente decimos que dos tangles son *iguales*, significando que son isotópicos.

Definición 3.9. Dos tangles orientados son *isotópicos orientados* si existe una isotopía entre ellos que preserve la orientación de los arcos correspondientes y los círculos correspondientes. Los diagramas de dos tangles isotópicos difieren por una secuencia de movidas de Reidemeister orientadas, es decir, las movidas de Reidemeister con orientación en los arcos pequeños que permanecen constantes durante los movimientos. Ver Figura 3.3.

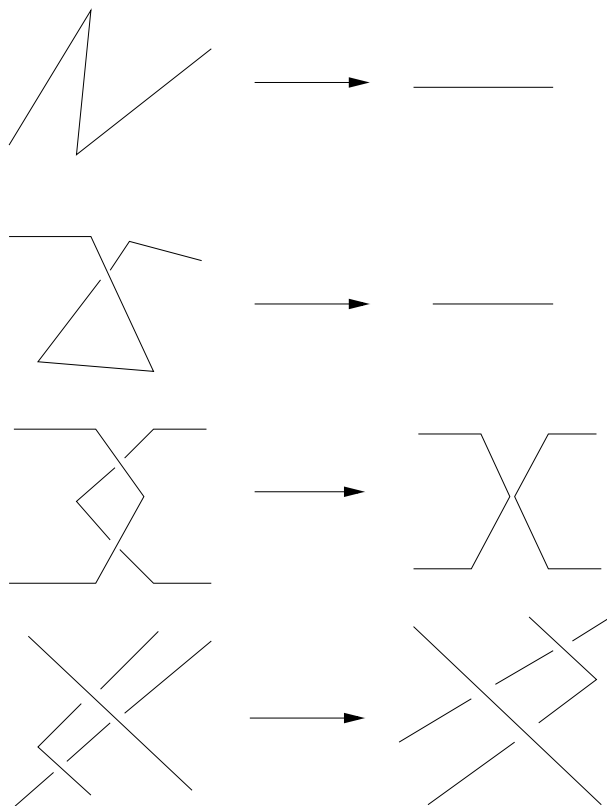


Figura 3.3: Movidas de Reidemeister I, II, III y IV, respectivamente

fi4

Definición 3.10. Un tangle (B, t) es *primo* si cumple las siguientes dos propiedades.

1. Cualquier 2-esfera en B que cruce transversalmente en dos puntos, acota a B en una bola y acota a t en un arco generado que no es nudo.
2. (B, t) es no racional.

Definición 3.11. Dados dos tangles (B_1, t_1) y (B_2, t_2) , un nuevo tangle puede producirse identificando un disco en la frontera de B_1 a un disco en la frontera de B_2 . A esto se le llama *suma parcial* de los tangles. Dados dos tangles (B_1, t_1) y (B_2, t_2) sea $f : (\partial B_1, \partial t_1) \rightarrow (\partial B_2, \partial t_2)$ un homeomorfismo. Un enlace con uno o dos componentes puede crearse identificando las fronteras de los tangles vía f . El resultado $(B_1, t_1) \cup_f (B_2, t_2)$ es la *suma* de los tangles.

Definición 3.12. Una *sombra meándrica* de una tangle tiene la propiedad de que los arcos no se autocruzan, esto es, son curvas simples.

Definición 3.13. Una proyección del tangle como la mostrada en la Figura 3.4(a) tiene una *conexión vertical*. La Figura 3.4(b) tiene una *X-conexión* y por último en la Figura 3.4(c) se muestra una *conexión horizontal*.

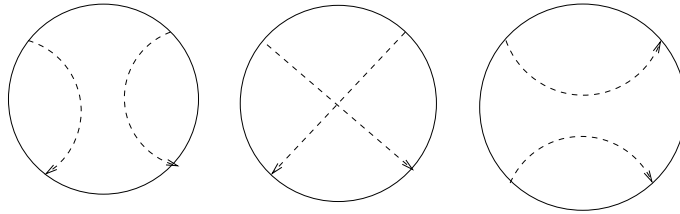


Figura 3.4: Tipos de conexiones, (a), (b) y (c), respectivamente

figu12

Definición 3.14. Una sombra meándrica con conexión horizontal es *m-reversa*, para un entero no negativo m , si existen m cruces entre los arcos que pueden etiquetarse $1, \dots, m$, de manera que al recorrer un arco (de izquierda a derecha) encontramos los cruces en este orden, y al recorrer el otro arco (de izquierda a derecha) los encontramos en el orden inverso.

Definición 3.15. Decimos que R^{hflip} es el *flip horizontal* del tangle R si R^{hflip} es obtenido de R por una rotación de 180° alrededor del eje horizontal en el plano de R .

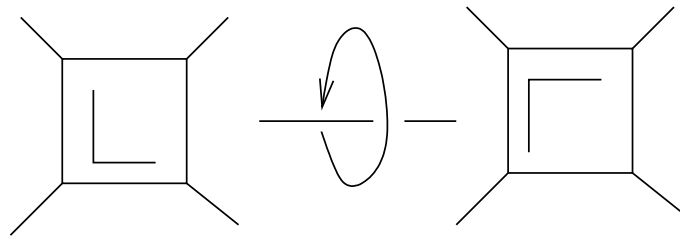


Figura 3.5: Ilustración de un flip horizontal.

figu17

3.2. Las herramientas principales

A continuación presentamos varios resultados cruciales para el resto del trabajo.

El siguiente teorema muestra que cualquier suma parcial de dos tangles primos es un tangle primo.

Licko **Teorema 3.16.** [6] Sea (C, v) un tangle y sea D un disco propiamente contenido en C que separa a (C, v) en dos tangles (A, t) y (B, u) . Si (A, t) es primo o racional, D corta ambos arcos de (A, t) y (B, u) es primo, entonces (C, v) es primo.

El siguiente lema enuncia que si para cualquier tangle se remueve del medio una tangle, y esta parte es reemplazada por un tangle primo, entonces el resultado es un tangle primo.

licko **Lema 3.17.** [6] Sea (A, t) un tangle que es primo o racional. Sea B una 3-bola en el interior de A que toca cada componente de t en un solo intervalo. Sea u dos arcos en B tal que (B, u) es un tangle primo y $\partial u = \partial B \cap t$. Denotamos por t' los dos arcos $(t - (t \cap B)) \cup u$; entonces (A, t') es un tangle primo.

Quach **Lema 3.18.** [11] Sea T_{p_1/q_1} y T_{p_2/q_2} dos tangles racionales, con p_1/q_1 y p_2/q_2 las fracciones continuas asociadas a los tangles. Si $p_1/q_1, p_2/q_2 \notin \mathbb{Z} \cup 1/0$, donde $1/0$ representa la fracción del tangle $[\infty]$, y si q_1 y q_2 son impares, entonces $T_{p_1/q_1} + T_{p_2/q_2}$ es primo.

Finalmente, presentamos un resultado crucial en la teoría de tangles.

Conway **Teorema 3.19.** [2] Dos tangles racionales son isotópicos si y sólo si tienen la misma fracción.

Capítulo 4

Demostraciones de los teoremas 1.1 y 1.2

resultados

Por el resto de este trabajo, nos enfocamos exclusivamente a sombras de tangles, por lo que cuando nos referimos a una sombra, esta es una sombra de tangle. Aún más, trabajamos únicamente con sombras meándricas. Por brevedad, cuando nos referimos a una sombra, esto debe interpretarse como una sombra meándrica de tangle.

4.1. Demostración del Teorema 1.1

Para conveniencia del lector, reproducimos el enunciado del Teorema 1.1.

Teorema 1.1 *Existe una constante $c > 1$ con la siguiente propiedad. Para todo entero $n \geq 3$, existen c^n sombras meándricas que no se resuelven en la tangle $[1, 4]$.*

En la Figura 4.1. Presentamos cuatro sombras, que llamamos *mosaicos*. Cuando incluimos un cuadro vacío \square en una sombra, esto significa que esa sección de la sombra es *monótona*, esto es, es de uno de los tipos mostrados en la Figura 4.2.

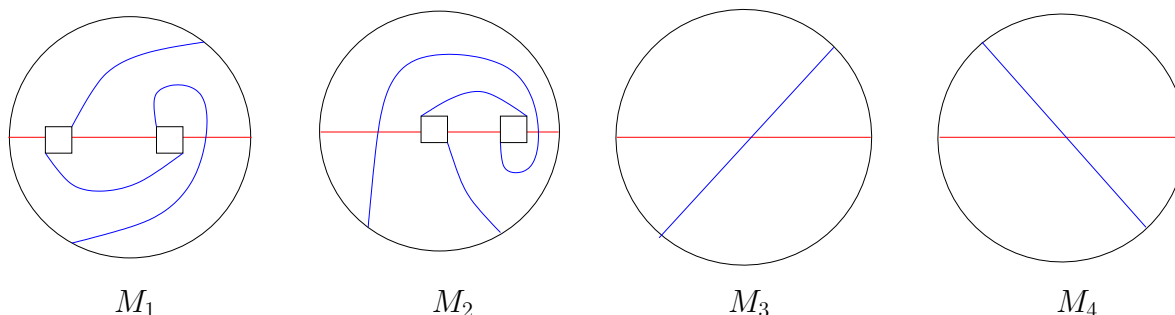


Figura 4.1: Los cuatro *mosaicos*.

fig6

Diremos que una sombra es *relevante* si se obtiene sumando (pegando) linealmente cualquier conjunto de mosaicos o de flips horizontales de mosaicos. Por ejemplo, la sombra ilustrada en la Figura 4.3 es relevante, pues es obtenida como la suma $M_2 + M_3 + M_4 + M_2 + M_1$.

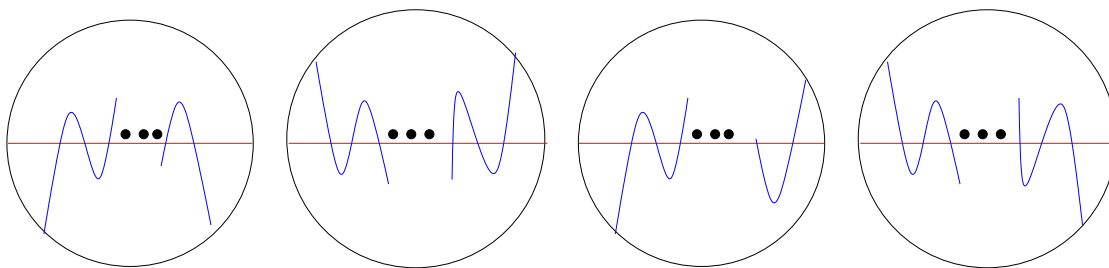


Figura 4.2: Sombras monótonas, representadas por \square .

fig:8a

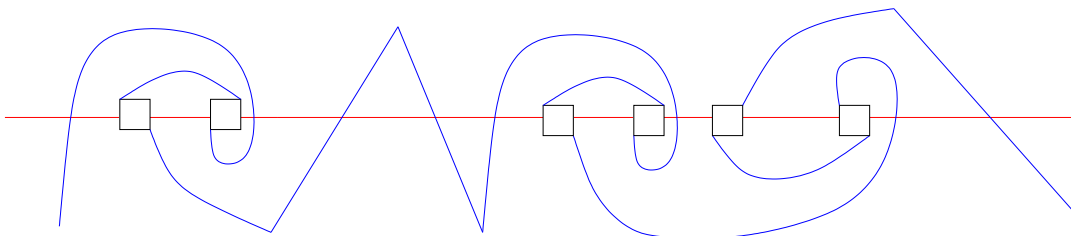


Figura 4.3: Una sombra relevante.

fig:120-1

Es fácil ver que el número de sombras relevantes con n vértices crece exponencialmente con n . Por esta razón, para demostrar el Teorema 1.1 basta demostrar lo siguiente.

Lema 4.1 (Implica el Teorema 1.1). *Si S es una sombra relevante, entonces S no se resuelve en la tangle $[1, 4]$.*

Hacia la prueba del Lemma 4.1, comenzamos demostrando el siguiente resultado.

Lema 4.2. *Supongamos que la sombra ilustrada en la Figura 4.4 se resuelve de manera que existe al menos un dígono en cada cuadro (al cual no puede aplicársele una movida de Reidemeister del Tipo III). Entonces la resolución obtenida corresponde a un tangle primo.*

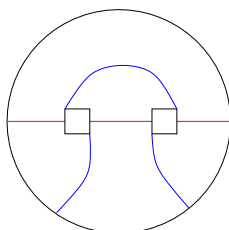


Figura 4.4: Sombra referente al Lema 4.2

fi5

Demostración. Si la resolución T de la sombra ilustrada cumple con la hipótesis, se sigue que T se puede escribir como una suma $C + D$ de dos tangles racionales, de la forma ilustrada en la Figura 4.5. donde cada cuadro contiene al menos un dígono al que se le puede aplicar un movimiento de Reidemeister de Tipo III.

Tenemos entonces que $C = [k_0]$ y $D = [k_1]$ con $k_0 \leq n, k_1 \leq n$. Las fracciones continuas correspondientes son $F(C) = \pm \frac{1}{k_0}$ y $F(D) = \pm \frac{1}{k_1}$, donde k_0, k_1 son impares. Por el Lema 3.18, se sigue que T es primo. \square

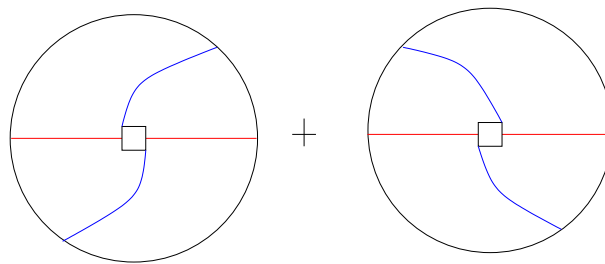


Figura 4.5: Ilustración de la demostración del Lema 4.2.

fi13

Demostración del Lema 4.1. La idea de la demostración consiste en probar que una resolución de una sombra relevante corresponde o bien a un tangle primo o a un tangle racional cuya fracción *no* es la fracción de $[1, 4]$.

Supongamos que S es una sombra relevante, y consideramos un tangle T que es una resolución de S . A grandes rasgos, la estrategia para la demostración es la siguiente:

1. Analizamos condiciones bajo las cuales T es primo. Bajo tales condiciones claramente T no es $[1, 4]$, pues $[1, 4]$ es un tangle racional.
2. Analizamos cuándo estas condiciones no se cumplen. En estos casos calculamos las posibles fracciones de T , y en cada caso hallamos que esta fracción no puede ser $\frac{5}{4}$, que es la fracción de T . Dado que dos tangles equivalentes tienen la misma fracción, esto demuestra que si T es racional entonces T tampoco puede ser $[1, 4]$.

Para la siguiente noción, referimos al lector a la Figura 4.6. En este caso, tenemos una copia de M_1 , del lado izquierdo, y su resolución se presenta en la parte central. Es fácil ver que utilizando movimientos de Reidemeister, esta tangle central se puede transformar en la tangle de la parte derecha. Decimos que la resolución de esta copia de M_1 es *trivializable*. (Esto también aplica si el arco azul pasa encima del rojo, en lugar de pasar debajo de él). De otra manera decimos que esta resolución es *no trivializable*. Resoluciones de copias de M_2 trivializables y no trivializables son definidas de manera totalmente análoga.

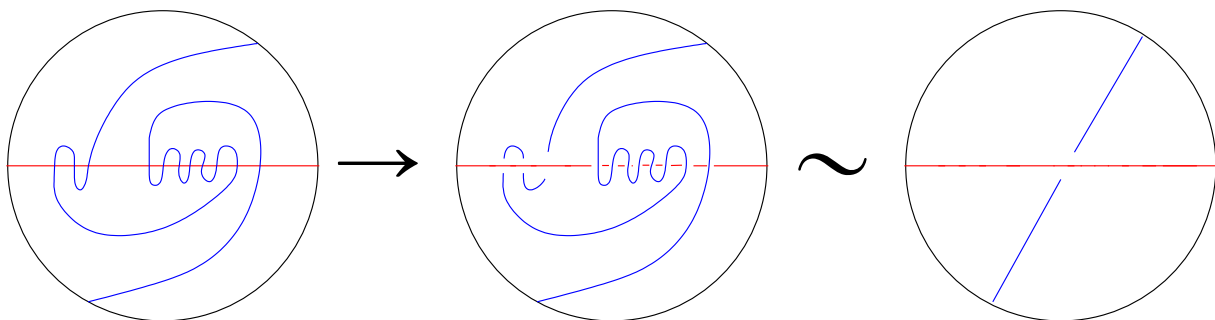


Figura 4.6: Una resolución trivializable.

fig:6b

Retomando la discusión, tenemos entonces una sombra S relevante con conexión horizontal. Recordemos que la hipótesis de que S es relevante significa que se puede descomponer en una

suma $\sum_{i=1}^k N_i$, donde cada uno de N_1, N_2, \dots, N_k es uno de los cuatro mosaicos en la Figura 4.1. Decimos que N_1, N_2, \dots, N_k son las *componentes* de S . Las componentes de S que son copias de M_1 ó M_2 son *importantes*. Tomamos entonces una resolución de S en un tangle T . Evidentemente, esta resolución se compone de la suma (de tangles) de las resoluciones de las componentes de S .

La demostración procede de acuerdo al número de resoluciones de componentes importantes de S que son no trivializables.

CASO 1. *Todas las resoluciones de componentes importantes de S son trivializables.*

CASO 2. *Entre todas las componentes importantes de S , exactamente una resolución es no trivializable.*

CASO 3. *Existen al menos dos componentes importantes de S que poseen resoluciones no trivializables.*

Demostraremos que en el Caso 1, el tangle T es un tangle entero $[k]$. Como la fracción de $[k]$ es k y la fracción de $[1, 4]$ es $5/4$, por el Teorema 3.19 se sigue que T no es $[1, 4]$. En el Caso 2, demostramos que T es un tangle racional cuya fracción es distinta a $5/4$, de manera que nuevamente se sigue, por el Teorema 3.19, que T tampoco puede ser $[1, 4]$. Finalmente, en el Caso 3 demostramos que T es un tangle primo. En este caso, de acuerdo a la Definición 3.10, se sigue que T no es racional; como $[1, 4]$ es racional, se sigue que T no es $[1, 4]$.

Utilizaremos la siguiente observación. Omitimos su demostración, que es sencilla.

obs:res1 *Observación 4.3.* Sea S una sombra meándrica del tipo ilustrado en la Figura 4.7, donde existe un número par n de intersecciones entre los arcos de la sombra. (Esta sombra es una instancia particular de sombra monótona). Entonces S se resuelve únicamente en tangles del tipo $[k]$, donde k es un entero tal que $|k| \leq n$.

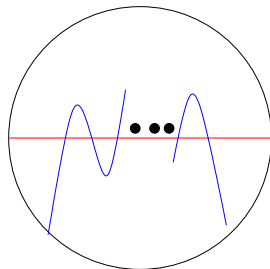


Figura 4.7: Esta sombra únicamente puede resolverse en tangles enteros. □

Análisis del Caso 1.

Por hipótesis todas las resoluciones de componentes importantes de S son trivializables. Esto implica que T puede ser obtenida como una resolución de una sombra relevante S' que es la suma de copias de mosaicos M_3 o M_4 . Esto es, S' es de la forma ilustrada en la Figura 4.7. Por la Observación 4.3, se sigue que T es un tangle entero. Como la fracción continua de un tangle entero es de la forma $[k]$, para k entero, y la fracción continua de $[1, 4]$ es $5/4$, se sigue del Teorema 3.19 que T no es $[1, 4]$.

Análisis del Caso 2.

Asumimos que la única componente importante de S que recibe una resolución no trivializable es una copia de M_1 , que por conveniencia se reproduce en la Figura 4.8. El caso en el que esta componente importante de S es una copia de M_2 se trata de manera completamente análoga.

Consideramos dos posibilidades. Supongamos primero que en la resolución no trivializable de la copia de M_1 , la parte contenida en uno de los cuadros se resuelve en una de las tangles mostradas a la derecha de la Figura 4.8. Considerando las diferentes posibles resoluciones, es fácil verificar que necesariamente T es una tangle racional de uno de los siguientes tipos,

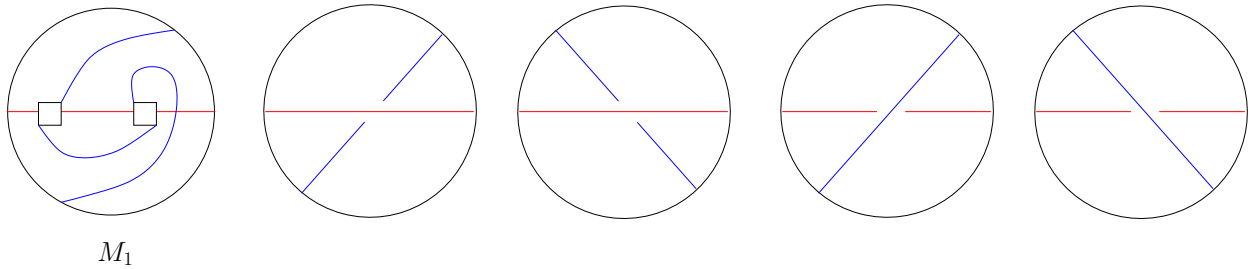


Figura 4.8: Ilustración de la demostración del Caso 2.

fig:6c

1. $[\pm 1, \pm 1, \pm(k+1)]$,
2. $[\pm 1, \pm 1, \pm(k-1)]$,
3. $[\pm 1, \pm 2, \pm(k-1)]$,
4. $[\pm 1, \pm 2, \pm(k+1)]$
5. $[\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm(k+1)]$,
6. $[\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm(k-1)]$,
7. $[\pm 3]$

con $k > 1$ impar. Las fracciones parciales correspondientes posibles son las siguientes:

1. $\pm 1 \pm \frac{k+1}{k+2}$,
2. $\pm 1 \pm \frac{k+1}{k}$,
3. $\pm 1 \pm \frac{k-1}{2-k}$,
4. $\pm 1 \pm \frac{k-1}{k}$,
5. $\pm 1 \pm \frac{k+1}{2k+3}$,
6. $\pm 1 \pm \frac{k+1}{2k+1}$,

7. $\pm 1 \pm \frac{k-1}{2k-1}$,
8. $\pm 1 \pm \frac{k-1}{3-2k}$,
9. $\pm 1 \pm \frac{2k-1}{k}$,
10. $\pm 1 \pm \frac{2k+3}{k+2}$,
11. $\pm 1 \pm \frac{1}{k}$,
12. $\pm 1 \pm \frac{1}{k+2}$,
13. $\pm 1 \pm \frac{2k-3}{2-k}$,
14. $\pm 1 \pm \frac{2k+1}{k}$,
15. $\pm 1 \pm \frac{1}{2-k}$,
16. $\frac{1}{3}$

Como la fracción del tangle $[1, 4]$ es $\frac{5}{4}$, se sigue por el Teorema 3.19 que en ninguno de estos casos T es la tangle $[1, 4]$.

Finalmente consideramos el caso en el que la parte contenida en ninguno de los dos cuadros se resuelve en una de las tangles mostradas a la derecha de la Figura 4.8. En este caso se cumplen las hipótesis del Lema 4.2 para este mosaico, y se sigue que la resolución de ese mosaico es un tangle primo. Por el Teorema 3.16, se sigue entonces que T es también primo, por lo que T no puede ser $[1, 4]$.

Análisis del Caso 3.

La hipótesis es ahora que existen al menos dos componentes importantes de S . En este caso, por la discusión presentada en el caso anterior, se sigue que la resolución correspondiente a cada una de estas componentes es o bien un tangle racional con denominador impar o un tangle primo. En el primer subcaso, a partir del Lema 3.18 se sigue que T es un tangle primo, y en particular no es igual a $[1, 4]$. En el segundo subcaso, como fue analizado en el Caso 2, utilizando el Teorema 3.16 se sigue también que necesariamente T es primo, por lo que no es igual a $[1, 4]$. \square

4.2. Demostración del Teorema 1.2

Para conveniencia del lector, reproducimos el enunciado del Teorema 1.2.

Teorema 1.2. *Una sombra meándrica de tangle se resuelve en la tangle $[-1, 4]$ si y sólo si no es monótona.*

Para demostrar el Teorema 1.2 nos apoyaremos en el siguiente lema, cuya demostración es un ejercicio, teniendo en cuenta que todas las sombras bajo consideración son sombras meándricas de tangles.

lem:rev1 **Lema 4.4.** Si S es una sombra con conexión horizontal que no es de la forma ilustrada en la Figura 4.7, entonces S es 3-reversa.

También utilizaremos el siguiente lema.

lem:rev2 **Lema 4.5.** Si S es una sombra con conexión horizontal 3-reversa, entonces T se resuelve en $[-1, 4]$

Demostración. La operación de suavizar un dígono en una sombra es ilustrada en la Figura 4.9. Enfatizamos que se asume que el dígono en consideración es vacío, y que la dirección de los arcos es como se indica. Trivialmente, si S es una sombra, y S' se obtiene a partir de S , entonces si S' se resuelve en T se sigue que S también se resuelve en T (basta hacer una asignación a los cruces del dígono que se suaviza de S para obtener S' de manera que es posible realizar una movida de Reidemeister de Tipo III).

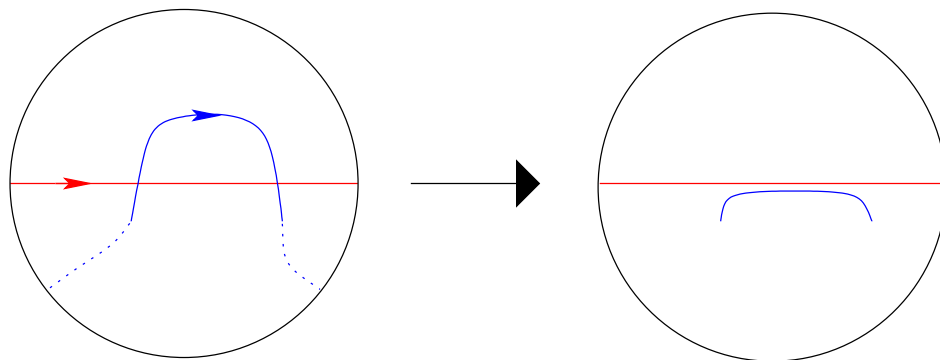


Figura 4.9: Suavizando un dígono.

fig:230

Sea S una sombra con conexión horizontal 3-reversa. Comenzamos suavizando recursivamente todos los dígono que sea posible suavizar, hasta que no es posible suavizar más dígono. Sea S'' la sombra obtenida. Es fácil ver que la hipótesis de que S es 3-reversa implica que S'' es de la forma ilustrada en la parte izquierda de la Figura 4.10.

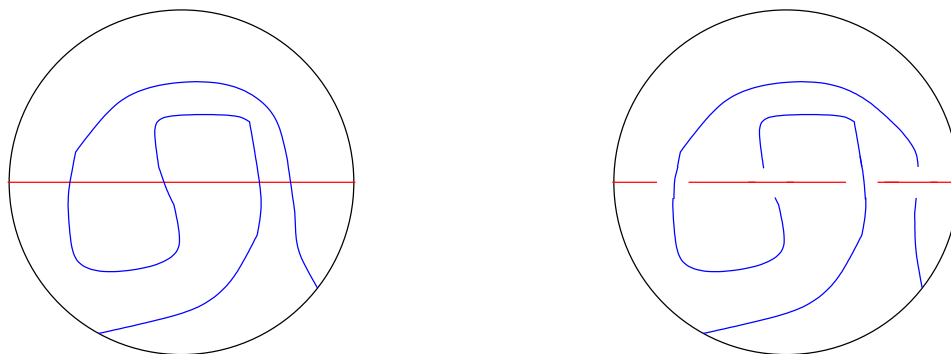


Figura 4.10: Ilustración de la demostración del Lema 4.5.

fig:260

Como se ilustra en la parte derecha de la Figura reffig:260, esa sombra admite una resolución que, como es fácil verificar, corresponde a la tangle $[-1, 4]$. Como toda tangle que es posible

obtener de una resolución de S'' es también susceptible de obtenerse a partir de una resolución de S , concluimos que S se resuelve en la tangle $[-1, 4]$. \square

Con estos ingredientes, la demostración del Teorema 1.2 es muy corta y sencilla.

Demostración del Teorema 1.2. Si S es de la forma ilustrada en la Figura 4.7, entonces se sigue a partir de la Observación 4.3 que S únicamente se resuelve en tangles enteras. Como $[-1, 4]$ no es una tangle entera, entonces S no puede resolverse en $[-1, 4]$.

Para la otra dirección, supongamos que S no es de la forma ilustrada en la Figura 4.7. Por el Lema 4.4, se sigue que S es 3-reversa, y por el Lema 4.5 concluimos que S sí puede resolverse en $[-1, 4]$. \square

Bibliografía

- adams** [1] C. C. Adams. *The knot book*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. An elementary introduction to the mathematical theory of knots, Revised reprint of the 1994 original.
- Conway** [2] J. H. Conway. An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties. In *Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967)*, pages 329–358. Pergamon, Oxford, 1970.
- haken** [3] W. Haken. Theorie der Normalflächen. *Acta Math.*, 105:245–375, 1961.
- hanaki** [4] R. Hanaki. On scannable properties of the original knot from a knot shadow. *Topology Appl.*, 194:296–305, 2015.
- kirby** [5] R. C. Kirby and W. B. R. Lickorish. Prime knots and concordance. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 86(3):437–441, 1979.
- lickorish** [6] W. B. R. Lickorish. Prime knots and tangles. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 267(1):321–332, 1981.
- ptan** [7] J. H. Przytycki and K. Taniyama. Almost positive links have negative signature. *J. Knot Theory Ramifications*, 19(2):187–289, 2010.
- rolfsen** [8] D. Rolfsen. *Knots and links*, volume 7 of *Mathematics Lecture Series*. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990. Corrected reprint of the 1976 original.
- takimura** [9] Y. Takimura. Regular projections of the knot 6_2 . *J. Knot Theory Ramifications*, 27(14):1850081, 31, 2018.
- taniyama** [10] K. Taniyama. A partial order of knots. *Tokyo J. Math.*, 12(1):205–229, 1989.
- van** [11] Q. thi Câm Vân. On a realization of prime tangles and knots. *Canadian J. Math.*, 35(2):311–323, 1983.