



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ



FACULTAD DE CIENCIAS

**Generación de atractores ocultos en sistemas
lineales conmutados no hiperbólicos**

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE
Doctor en Ciencias Aplicadas

PRESENTA:

Finees Delgado Aranda

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Isaac Campos Cantón

SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P.

FEBRERO 2021

TESIS DE DOCTORADO

Generación de atractores ocultos en sistemas
lineales conmutados no hiperbólicos

M.C. Finees Delgado Aranda

COMITÉ SINODAL

Sinodal

Dr. Luis Javier Ontañón García Pimentel

Sinodal

Dr. José Salomé Murguía Ibarra

Sinodal

Dr. Raúl Eduardo Balderas Navarro

Sinodal Externo

Dr. Héctor Eduardo Gilardi Velázquez

Asesor

Dr. Isaac Campos Cantón

FEBRERO 2021

Declaración de autoría y originalidad de la tesis

Yo, Finees Delgado Aranda, estudiante del Posgrado en Ciencias Aplicadas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, como autor de la tesis “Generación de atractores ocultos en sistemas lineales conmutados no hiperbólicos”, declaro que la tesis es una obra original, inédita, auténtica, personal, que se han citado las fuentes correspondientes y que en su ejecución se respetaron las disposiciones legales vigentes que protegen los derechos de autor y de propiedad intelectual e industrial. Las ideas, doctrinas, resultados y conclusiones a los que he llegado son de mi absoluta responsabilidad.

Resumen

Recientemente, se ha estudiado el comportamiento caótico en sistemas dinámicos que generan atractores ocultos. La mayoría de estos sistemas tienen no linealidades cuadráticas. Este trabajo presenta una nueva metodología para desarrollar una familia de atractores ocultos tridimensionales a partir de la conmutación de sistemas lineales no hiperbólicos. Esta metodología permite obtener atractores extraños con un solo equilibrio estable, atractores con un número infinito de equilibrios o atractores sin equilibrio. Además, esta metodología permite generar atractores con equilibrio variable en \mathbb{R}^n , esto quiere decir que el sistema puede cambiar la cantidad de equilibrios si se varía uno o dos parámetros del sistema. Adicionalmente, estos atractores se diseñan en su versión *multicroll*, y se implementa la sincronización de sistemas. Lo anterior se logra a través de una búsqueda sistemática de parámetros por una computadora para encontrar el comportamiento caótico.

Abstract

Recently, chaotic behavior has been studied in dynamical systems that generate hidden attractors. Most of these systems have quadratic nonlinearities. This paper presents a new methodology to develop a family of three-dimensional hidden attractors from the switching of non-hyperbolic linear systems. This methodology allows to obtain strange attractors with only one stable equilibrium, attractors with an infinite number of equilibria or attractors without equilibrium. Moreover, this methodology allows generating attractors with variable equilibrium in \mathbb{R}^n , that is, the system can change the number of equilibria if one or two parameters of the system are varied. In addition, these attractors are designed in their multicroll version, and the multicroll version, and system synchronization is implemented. This is achieved through a systematic search of parameters by a computer to find the chaotic behavior.

Agradecimientos

Especialmente a mi familia por el apoyo y la confianza que me dieron, es por ellos que fue posible haber terminado mis estudios de posgrado.

A mi asesor, al Dr. Isaac Campos Cantón por brindarme sus conocimientos y consejos en este proyecto de tesis y en cada una de las asignaturas a lo largo de mis estudios de posgrado.

Al Dr. José Manuel Camacho Flores y al Dr. Raúl Balderas por sus valiosas enseñanzas y aportaciones a este trabajo.

A mis amigos y compañeros: Lucy, Gerardo, Lalo, Karla y Ulises por el todo apoyo y por los grandes momentos vividos.

A mis amigos, el Dr. Pablo Salas Castro y el Dr. Edgar Tristán Hernández por la amistad, todo el apoyo incondicional y por compartir sus conocimientos.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la oportunidad y el apoyo económico brindado a través de la beca No. 419416, para realizar mis estudios de doctorado.

Dedicatoria

A mis padres y familia

Contenido

1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	1
1.2. Justificación	3
1.3. Objetivo	3
2. Marco teórico	5
2.1. Sistemas dinámicos	5
2.2. Sistemas lineales	6
2.3. Sistemas caóticos	9
2.3.1. Exponentes de Lyapunov	10
2.4. Sistemas caóticos con equilibrio	13
2.4.1. Criterio de Shilnikov	13
2.5. Sistemas caóticos con atractores ocultos	17
2.5.1. Sistemas sin equilibrio	17
2.5.2. Sistemas con un número infinito de equilibrios	20
2.5.3. Sistemas con un solo equilibrio estable	23
3. Sistemas lineales conmutados con atractores ocultos	25
3.1. Sistema caótico conmutado sin equilibrio	27
3.2. Sistema conmutado con una línea de equilibrios	33
3.3. Sistema conmutado con equilibrio estable	39
3.4. Sistema multienroscado sin equilibrio	46
4. Sistemas con equilibrio variable	51
4.1. Atractor caótico en tres dimensiones	51
4.2. Atractor caótico en cuatro dimensiones	54

4.3. Atractor caótico en cinco dimensiones	56
4.4. Atractor caótico en n -dimensiones	58
4.5. Análisis de rendimiento	58
4.6. Implementación del circuito	62
5. Conclusiones	69
5.1. Trabajo a futuro	71
A. Búsqueda sistemática asistida para encontrar sistemas caóticos	79
A.1. Rutina principal	79
A.2. Función lyapunov	81
A.3. Función Jac_Y2	82
A.4. Clasificador de sistemas	83
B. Búsqueda sistemática para encontrar parámetros de sincronización	85
B.1. Función principal	85
B.2. Función System_LECoupled	86

Índice de figuras

2.1. Retratos fase de los diferentes comportamientos de un sistema lineal hiperbólico en \mathbb{R}^2	8
2.2. Retratos fase de un sistema lineal no hiperbólico en \mathbb{R}^2 (centros).	9
2.3. Diagramas de los atractores caóticos de los sistemas de la Tabla 2.3.	16
2.4. Diagramas de los atractores caóticos de los sistemas sin equilibrio de la Tabla 2.4.	19
2.5. Diagramas de los atractores caóticos de los sistemas con un número infinito de equilibrios de la Tabla 2.5.	22
2.6. Diagramas de los atractores caóticos de los sistemas con un equilibrio estable de la Tabla 2.6.	24
3.1. (a) Series de tiempo de los estados del sistema conmutado sin equilibrio. (b) Espectros de frecuencia (Hz) de las series de tiempo.	29
3.2. Diagramas de espacio fase del sistema conmutado sin equilibrio en el plano (a) $x_1 - x_2$, (b) $x_1 - x_3$ y (c) $x_2 - x_3$. (d) Atractor caótico en el espacio tridimensional cuando $p = 0.25$, $q = 3$ y $k = 2.3$	30
3.3. Exponentes de Lyapunov asociados al sistema conmutado sin equilibrio.	30
3.4. Diagrama de bifurcación del sistema caótico sin equilibrio en el intervalo $2 \leq k \leq 5$	31
3.5. Exponentes de Lyapunov en el intervalo $2 \leq k \leq 5$	31
3.6. Ciclos límites del sistema conmutado sin equilibrio cuando (a) $k = 2.7$, (b) $k = 3.7$, (c) $k = 4.3$ y (d) $k = 5$	32
3.7. (a) Series de tiempo de los estados del sistema conmutado con una línea de equilibrios. (b) Espectros de frecuencia (Hz) de las series de tiempo.	35

3.8. Diagramas de espacio fase del sistema conmutado con una línea de equilibrios en el plano (a) $x_1 - x_2$, (b) $x_1 - x_3$ y (c) $x_2 - x_3$. (d) Atractor caótico en el espacio tridimensional cuando $p = 0.25$, $q = 3$, $k_1 = 1.9$, $k_2 = 4.1$ y $k_3 = 1.75$.	36
3.9. Exponentes de Lyapunov asociados al sistema conmutado con un número infinito de puntos de equilibrios.	37
3.10. Diagrama de bifurcación del sistema conmutado con una línea de equilibrios en el intervalo de $1.5 \leq k_1 \leq 5$	37
3.11. Exponentes de Lyapunov sistema conmutado con una línea de equilibrios cuando $1.5 \leq k_1 \leq 5$	38
3.12. Ciclos límites del sistema conmutado con una línea de equilibrios cuando (a) $k_1 = 2.5$, (b) $k_1 = 3.24$, (c) $k_1 = 4.48$ y (d) $k_1 = 5$	38
3.13. (a) Series de tiempo de los estados del sistema conmutado con un solo equilibrio estable. (b) Espectros de frecuencia (Hz) de las series de tiempo.	42
3.14. Diagramas de espacio fase del sistema conmutado con un solo equilibrio estable en el plano (a) $x_1 - x_2$, (b) $x_1 - x_3$ y (c) $x_2 - x_3$. (d) Atractor caótico en el espacio tridimensional.	43
3.15. Exponentes de Lyapunov asociados al sistema conmutado con un equilibrio estable cuando $p = 0.25$, $q = 3$, $k_1 = 2$ y $k_2 = 2.6$	44
3.16. Diagrama de bifurcación del sistema caótico con equilibrio estable cuando $0 \leq k_2 \leq 4.5$	44
3.17. Exponentes de Lyapunov cuando $0 \leq k_2 \leq 4.5$	45
3.18. Ciclos límites del sistema conmutado con un equilibrio estable cuando (a) $k_2 = 0.1$, (b) $k_2 = 0.5$, (c) $k_2 = 1$ y (d) $k_2 = 1.5$	45
3.19. Sistema conmutado sin equilibrio de dos enroscados.	47
3.20. Sistema conmutado sin equilibrio de tres enroscados.	48
3.21. Sistema conmutado sin equilibrio de cuatro enroscados.	48
4.1. Series de tiempo de los estados x , y y z del sistema conmutado.	53
4.2. Diagramas del espacio fase del atractor de dos enroscados cuando $d = 0.5$ en el plano (a) $x - y$, (b) $x - z$ y (c) $y - z$. (d) Atractor caótico en el espacio tridimensional.	53
4.3. Series de tiempo de los estados x , y , z y w del sistema conmutado.	55
4.4. Atractor caótico en el espacio tridimensional (a) xzw y (b) yzw	55
4.5. Series de tiempo de los estados x , y , z , w y u del sistema conmutado.	57
4.6. Atractor caótico en el espacio tridimensional (a) xzu , (b) ywu y (c) zwu	57
4.7. Espectro de los exponentes de Lyapunov de los atractores hipercaóticos cuando d varía de -4 a 4 : (a) tres dimensiones, (b) cuatro dimensiones y (c) cinco dimensiones.	59
4.8. Mapas de Poincaré de los atractores hipercaóticos en (a) tres dimensiones, (b) cuatro dimensiones y (c) cinco dimensiones.	60

4.9. Diagramas de bifurcación de los atractores cuando d varía de -4 a 4 : (a) tres dimensiones, (b) cuatro dimensiones y (c) cinco dimensiones.	60
4.10. Comportamiento cuasi-periódico del sistema caótico tridimensional cuando $d = 2$: (a) diagramas del espacio fase y (b) series de tiempo.	61
4.11. Resultados de la complejidad de las series de tiempo cuando el parámetro d varía, la complejidad: la línea azul es respecto al estado z del atractor en 3D; la línea roja respecto al estado de w del atractor en 4D y la línea amarilla es respecto al estado u del atractor en 5D.	62
4.12. Circuito principal del sistema caótico tridimensional.	63
4.13. Diagrama del circuito de la función $g(z)$	64
4.14. Respuesta del circuito electrónico en el plano (a) $x - y$, (b) $x - z$ y (c) $y - z$	65
4.15. Sistema caótico PWL con una línea de equilibrios localmente de (a) 2×5 enroscados, (b) 4×3 enroscados y (c) 6×5 enroscados.	67

Índice de tablas

2.1. Exponentes de Lyapunov para los diferentes atractores en \mathbb{R}^3	11
2.2. Exponentes de Lyapunov para los diferentes atractores en \mathbb{R}^n	12
2.3. Sistemas caóticos con puntos de equilibrio.	15
2.4. Sistemas caóticos sin equilibrio.	18
2.5. Sistemas caóticos con un número infinito de puntos de equilibrio.	21
2.6. Sistemas caóticos con un equilibrio estable.	23
3.1. Exponentes de Lyapunov de los atractores sin equilibrio de uno, dos, tres y cuatro enroscados.	49
4.1. Exponentes de Lyapunov de los sistemas conmutados cuando $d = 0.5$	59

Capítulo 1

Introducción

La mayoría de los fenómenos ocurridos en la ciencia y en la tecnología tienen naturaleza dinámica. Los procesos dinámicos suelen dividirse en dos grandes grupos: lineales y no lineales. Estos últimos, han sido ampliamente estudiados debido a que algunos de ellos producen oscilaciones de carácter caótico. A partir de la segunda mitad del siglo XX, muchos científicos han investigado las propiedades y características de los sistemas caóticos, ya que en algunas aplicaciones el caos puede ser benéfico y de gran utilidad.

El primer sistema caótico fue introducido por Edward Lorenz [1]. A partir de este, surge el interés en desarrollar nuevos sistemas similares con la finalidad de ser implementados en aplicaciones tales como la comunicación segura [2, 3], cifrado de información [4], sistemas de potencia [5], mezcla de líquidos [6], regulaciones sobre el cerebro humano y latidos del corazón [7, 8], prevención de resonancia en sistemas mecánicos [9], entre otros.

1.1 Estado del arte

El equilibrio es una característica importante de los sistemas dinámicos, ya que el movimiento de sus trayectorias depende del comportamiento local en las vecindades del punto de equilibrio. La mayoría de los sistemas caóticos reportados en la literatura tienen un número determinado de puntos de equilibrio y estos han sido ampliamente estudiados. Por ejemplo, los sistemas de Lorenz [1], Chen [10], Lü [11] y Chua [12] tienen tres puntos de equilibrio, y el sistema de Rössler [13] tiene solamente dos puntos de equilibrio. Del mismo modo, Sprott [14] propuso un conjunto de sistemas caóticos que algunos de ellos tienen uno o dos puntos de equilibrio. Además, los sistemas caóticos multienroscados tienen un punto de equilibrio

por cada dominio definido por una función lineal a trozos (PWL por sus siglas en inglés). La función PWL permite obtener un conjunto de sistemas lineales, cada sistema tiene un punto de equilibrio hiperbólico [15–20]. Los sistemas caóticos antes mencionados, tienen una estructura tal que sus oscilaciones son excitadas desde un equilibrio inestable; es decir, si sus cuencas de atracción se intersecan con cualquier vecindad de un punto de equilibrio inestable, entonces se genera un *atractor auto-excitado*.

Sin embargo, en años recientes algunos científicos han encontrado sistemas que producen atractores periódicos o caóticos de los cuales su cuenca de atracción no se interseca con las vecindades de un punto de equilibrio; estos son conocidos como *atractores ocultos*. Estos sistemas caóticos son más difíciles de localizar debido a que sus cuencas de atracción pueden ser muy pequeñas y la dimensión del atractor oculto puede ser mucho menor que la dimensión del sistema considerado. Además, no es posible aplicar el teorema de Shilnikov [21, 22] para demostrar la existencia de caos, debido a que no tienen órbitas homoclínicas y heteroclínicas. De acuerdo con [23] los atractores ocultos son clasificados como:

- sistemas sin equilibrio,
- sistemas con un número infinito de equilibrios y
- sistemas con un solo equilibrio estable.

Algunos autores han diseñado sistemas caóticos sin punto de equilibrio, tales como Pham [24], C. Wang [25] y Azar [26]. De la misma manera, Wei [27] construyó un sistema caótico basado en el sistema A de Sprott, mientras Jafari [28] propuso un conjunto de 17 sistemas caóticos por medio de tres métodos básicos. También, Jafari [29] propuso un sistema caótico sin equilibrio multienroscado. Además, otros autores han investigado el comportamiento de dichos sistemas en dimensiones mayores a tres [30] y de orden fraccionario [31, 32].

Por otro lado, algunos científicos han desarrollado sistemas caóticos e hipercaóticos que presentan un número infinito de puntos de equilibrio. Por ejemplo, Zhou [33] desarrolló un sistema no lineal en 4D basado en el sistema de Lü, el cual tiene un número infinito de puntos de equilibrio. Similarmente, desarrolló un sistema caótico de orden fraccional con un número indeterminado de puntos de equilibrio [34]. Por otro lado, Jafari propuso una forma paramétrica general con no linealidades cuadráticas del cual surgen un conjunto de sistemas y presentan una línea de puntos de equilibrio [35]. De forma similar, Chunbiao [36] propuso un conjunto de flujos caóticos que tienen una línea con infinitos equilibrios. Adicionalmente, Li [37] propuso un sistema 4D el cual se basa en el modelo matemático de un memristor que también tiene una línea de equilibrio y éste fue implementado en un circuito electrónico.

Finalmente, los sistemas caóticos con un solo equilibrio estable también han sido estudiados por diferentes autores. Inspirados en el sistema E de Sprott [14], Wang y Chen introdujeron un nuevo sistema con un solo equilibrio estable [38]. En la literatura podemos encontrar también sistemas de ecuaciones diferenciales con no linealidades cuadráticas y realizaron una búsqueda sistemática para encontrar parámetros donde es posible obtener atractores

1.3. Objetivo

caóticos ocultos [39–41]. También, Pham presentó un sistema caótico que tiene un equilibrio variable [42], esto quiere decir que el sistema puede cambiar la cantidad de equilibrios si se varía uno o dos parámetros del sistema; es decir, se puede tener un número infinito de puntos de equilibrio, o solamente un equilibrio estable o ningún equilibrio. A pesar de que es muy complicado encontrar sistemas caóticos con un equilibrio estable, existen algunos sistemas que presentan dos puntos de equilibrio estable [43, 44].

1.2 Justificación

Actualmente, el estudio de sistemas con atractores ocultos se ha convertido en una línea atractiva de investigación ya que los atractores ocultos juegan un papel importante en problemas teóricos y aplicaciones de ingeniería. En la literatura se puede encontrar que la mayoría de los estudios realizados son sistemas que presentan no linealidades del tipo cuadrático o el producto de dos estados. Por otro lado, los sistemas caóticos generados a través de conmutación de sistemas lineales son muy importantes en el desarrollo de aplicaciones científicas y tecnológicas. Lo anterior nos hace cuestionar la posibilidad de generar atractores ocultos a través sistemas discontinuos ya que pocos estudios se han realizado sobre ellos [45, 46].

1.3 Objetivo

Desarrollar una metodología para generar atractores ocultos y multienroscados a través de la conmutación de sistemas lineales mediante el ajuste de sus parámetros de equilibrio y estabilidad.

Objetivos particulares

- Generar atractores ocultos sin equilibrio.
- Generar atractores ocultos con un número infinito de puntos de equilibrio.
- Generar atractores ocultos con un solo equilibrio estable.
- Generar atractores ocultos con equilibrio variable.
- Generar atractores ocultos multienroscados e hipercaóticos.

Capítulo 2

Marco teórico

Teniendo en cuenta el objetivo del trabajo de tesis, este capítulo es dedicado a introducir algunas definiciones y conceptos matemáticos con el fin de facilitar el entendimiento del desarrollo y la interpretación de los resultados del mismo. En la primera sección se presenta los conceptos básicos de los sistemas dinámicos. Debido a que la teoría de sistemas lineales es muy extensa, en la segunda sección expone los temas más relevantes que serán de gran utilidad para comprender este trabajo. En la última sección se presentan los conceptos fundamentales de la teoría de caos.

2.1 Sistemas dinámicos

Se denomina *sistema dinámico* aquel cuyo estado cambia en el tiempo. Se dice que el sistema es *determinista* si el conocimiento de sus ecuaciones, los parámetros que describen el sistema, y las condiciones iniciales determinan completamente el comportamiento posterior del sistema, es decir, predice exactamente el comportamiento futuro del sistema. De lo contrario, se dice que el sistema puede ser *estocástico*, es decir, el estado futuro del sistema está determinado tanto por las acciones predecibles del proceso como por elementos aleatorios.

Existen dos tipos de sistemas dinámicos: aquellos cuya evolución ocurren en tiempo continuo y están representado en *ecuaciones diferenciales*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)); \tag{2.1}$$

por otra parte, existen aquellos que cuyos cambios ocurren en tiempo discreto y se representan a través de *ecuaciones en diferencia* (también conocidos como mapas iterados), representados por

$$\mathbf{x}(n+1) = f(\mathbf{x}(n)), \quad (2.2)$$

donde las Ecs. (2.1) y (2.2), $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados. Por lo tanto, el conjunto solución o flujo del sistema en tiempo continuo y discreto se escribe como $\Phi(t, x)$ y $\Phi(n, x)$, respectivamente. Las ecuaciones diferenciales son usadas ampliamente en aplicaciones de ciencia e ingeniería, en éstas nos enfocaremos en el resto de este trabajo. La definición matemática de un sistema dinámico es la siguiente:

Definición 2.1 Sistema dinámico [21]

Tres componentes son usados en la definición de un sistema dinámico. (1) Un espacio métrico \mathcal{S} llamado espacio de estados. (2) Una variable de tiempo t el cual puede ser continua ($t \in \mathbb{R}$) o discreta ($t \in \mathbb{Z}$). (3) Una ley de evolución, es decir, un mapeo de cualquier punto x en \mathcal{S} y cualquier t a un estado único definido $\Phi(t, x) \in \mathcal{S}$ el cual satisface lo siguiente:

1. $\Phi(0, x) = x$.
2. $\Phi(t_1, \Phi(t_2, x)) = \Phi(t_1 + t_2, x)$.
3. $\Phi(t, x)$ es continuo con respecto a (t, x) .

La trayectoria de un sistema dinámico continuo traza su evolución a lo largo del tiempo en un *espacio de fase*, cuyas coordenadas describen el estado dinámico del sistema en un momento determinado. Los conjuntos de trayectorias en un espacio de fase son representadas a través un *retrato de fase*. En un sistema disipativo, este retrato muestra la estructura de los atractores y las cuencas del mismo formadas por las trayectorias.

2.2 Sistemas lineales

Actualmente, la teoría de los sistemas dinámicos lineales ha sido ampliamente estudiada. Las ecuaciones lineales son de gran importancia, debido a que una ecuación no lineal se puede reducir al caso lineal. Esto se basa en la idea fundamental de que cada función uniforme se puede aproximar con una función lineal en la vecindad de un punto de equilibrio. El sistema dinámico

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.3)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es denominado *sistema dinámico lineal*, el cual satisface el principio de superposición.

2.2. Sistemas lineales

Lema 2.1 Principio de superposición [47]

Sea $I, J \subset \mathbb{R}$, $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos soluciones de (2.3) y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \quad (2.4)$$

es una solución de (2.3) sobre $I \cap J$.

El operador función exponencial nos permite formular la solución al problema del valor inicial de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas. Entonces, se mantiene que

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} \quad (2.5)$$

donde $A_{n \times n}$ es un operador lineal.

Teorema 2.1 Teorema fundamental de los sistemas lineales [48]

Para un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dado, el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

tiene una única solución la cual esta dada por

$$x(t) = e^{At}x_0. \quad (2.7)$$

El equilibrio es una característica importante de los sistemas lineales, ya que el comportamiento del sistema se describe en las vecindades de su equilibrio. Un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ es llamado *punto de equilibrio* o *punto crítico* de (2.3) cuando $\dot{x} = 0$. El comportamiento del punto de equilibrio esta determinado por los eigenvalores de la matriz A . Un punto de equilibrio x^* es llamado *punto de equilibrio hiperbólico* de (2.3) si todos los eigenvalores de la matriz A tienen parte real diferente de cero. Por lo tanto, el flujo $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se denomina flujo hiperbólico y el sistema (2.3) es llamado *sistema lineal hiperbólico*. La clasificación de los puntos de equilibrio está dada de acuerdo a los signos de las partes reales de los eigenvalores de A . Un punto de equilibrio x^* es llamado *sumidero hiperbólico* si todos los eigenvalores de la matriz A tienen parte real negativa; es denominado como *fente hiperbólica* si todos los eigenvalores de A tienen parte real positiva; y es llamado *silla* si la matriz A tiene al menos un eigenvalor con parte real positiva y al menos un eigenvalor con parte real negativa. La Figura 2.1 muestra el comportamiento de cada uno de los tipos de puntos de equilibrio para el sistema lineal (2.3) en \mathbb{R}^2 .

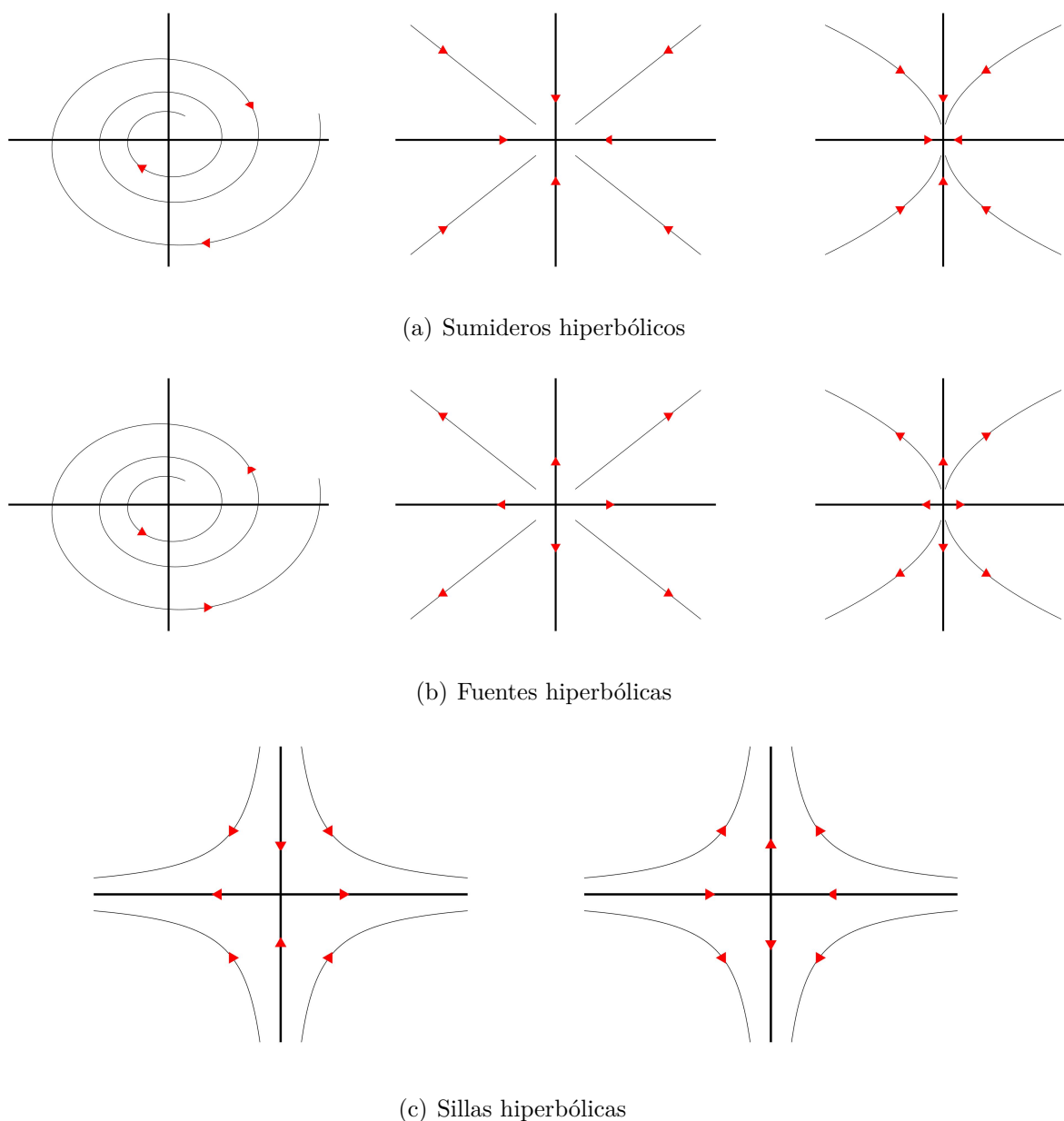


Figura 2.1: Retratos fase de los diferentes comportamientos de un sistema lineal hiperbólico en \mathbb{R}^2 .

Por otro lado, si la matriz de coeficientes A tiene al menos un eigenvalor con parte real nula, entonces, el sistema lineal (2.3) es *no hiperbólico* y tiene *puntos de equilibrio degenerados*. Si los eigenvalores de A tienen puramente parte imaginaria, el origen es un punto de equilibrio y es conocido como *centro*. La Figura 2.2 muestra el comportamiento de puntos de equilibrio degenerados de un sistema lineal de la forma (2.3) en \mathbb{R}^2 .

Por otro lado, la dinámica local alrededor de un punto de equilibrio en los sistemas no lineales de la forma:

$$\dot{x} = f(x). \tag{2.8}$$

2.3. Sistemas Caóticos

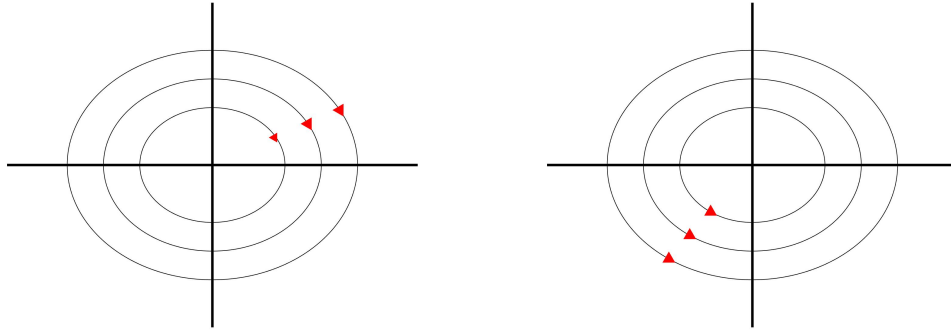


Figura 2.2: Retratos fase de un sistema lineal no hiperbólico en \mathbb{R}^2 (centros).

se lleva a cabo por medio de su linealización a través de la función Jacobiana definida como

$$Df(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

donde la matriz $A = Df(x_0)$. De acuerdo con el Teorema de Hartman-Grobman [48], se dice que el sistema no lineal (2.8) y el sistema lineal (2.3) son topológicamente conjugados en una vecindad de x_0 o tienen la misma estructura cualitativa cerca del origen, si existe un homeomorfismo H que mapea las trayectorias de (2.8) en un conjunto U (que contiene al origen) en las trayectorias de (2.3) un conjunto V (que contiene el origen) y preserva la parametrización del tiempo.

2.3 Sistemas caóticos

De forma general, un *sistema caótico* se describe como el comportamiento aperiódico a largo plazo en un sistema determinista que exhibe dependencia sensible a las condiciones iniciales. Actualmente, la definición de sistema caótico es muy variada dentro de la comunidad científica; sin embargo, se puede ofrecer una definición a través del enfoque topológico. Para comprender de mejor manera dicha definición, se introducirán tres conceptos importantes.

Definición 2.2 Sistema transitivo [49]

Sea $f : J \rightarrow J$ un sistema dinámico. Se dice que f es topológicamente transitivo si para cualquier par de conjuntos abiertos $U, V \subset J$ existe $K > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Definición 2.3 Dependencia sensible a las condiciones iniciales [49]

Sea $f : J \rightarrow J$ un sistema dinámico. Entonces, f tiene dependencia de manera sensible a las condiciones iniciales si existe $\delta > 0$ tal que, para cualquier $x \in J$ y cualquier vecindad N de x , existe $y \in N$ y $n \geq 0$ tal que $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Definición 2.4 Conjunto denso [49]

Considere un conjunto X , y Y un subconjunto de X . Entonces, se dice que Y es denso en X si para cualquier punto $x \in X$, existe un punto $y \in Y$ arbitrariamente cerca a x .

Dadas las definiciones anteriores, se puede dar una definición de un sistema caótico desde el punto de vista topológico.

Definición 2.5 Sistema caótico [49]

Se dice que un sistema dinámico es caótico si:

- es topológicamente transitivo,
- tiene una dependencia sensible a las condiciones iniciales,
- si sus órbitas son densas.

En un sistema dinámico con disipación (sistema que no tiene una divergencia nula), la divergencia negativa asegura que el flujo $\phi(t, x)$ se contraerá en un conjunto atrayente de volumen de fase cero. Tal conjunto puede ser un punto fijo, un atractor periódico o cuasi-periódico, o un atractor caótico. De acuerdo con el teorema de Poincaré-Bendixson, una condición necesaria para que un campo vectorial continuo de n -dimensiones sea caótico es que sea mayor o igual a tres. La naturaleza caótica de un sistema puede establecerse examinando la divergencia de trayectorias, cuantificada por el espectro de los exponentes de Lyapunov del sistema dinámico [50]. Además, es posible identificar si un sistema dinámico es caótico a partir de sus series temporales, si estas presentan un exponente de Lyapunov positivo [51]. Los exponentes de Lyapunov son considerados en este trabajo para verificar la existencia de caos.

2.3.1 Exponentes de Lyapunov

El caos, frecuentemente, se puede identificar al observar el atractor extraño en un diagrama de espacio de estados o en una sección de Poincaré. Sin embargo, es útil tener una medida más objetiva y cuantitativa del caos, y para ese propósito, el *exponente de Lyapunov* es ideal [50–53]. El exponente de Lyapunov recibe su nombre en honor al matemático ruso

2.3. Sistemas Caóticos

λ_{L_1}	λ_{L_2}	λ_{L_3}	Atractor	D_{KY}	Dinámica
–	–	–	Punto de equilibrio	0	Estático
0	–	–	Atracción de 2-toros	1	Periódico
0	0	–	Punto de equilibrio	2	Cuasi-periódico
0	0	0	Toro invariante	1 o 2	(Cuasi)-periódico
+	0	–	Extraño	2 o 3	Caótico

Tabla 2.1: Exponentes de Lyapunov para los diferentes atractores en \mathbb{R}^3 .

Aleksandr Lyapunov, que fue uno de los primeros en explorar la estabilidad dinámica hace cien años. Su nombre a veces se escribe como *Liapunov*.

La principal característica que define al *caos* es la sensibilidad a las condiciones iniciales. Considere dos condiciones iniciales cercanas en el atractor separadas por una distancia $d_j(i) = \|X_j - X_{\hat{j}}\|$ que crece exponencialmente en el tiempo cuando se promedia a lo largo de la trayectoria X , esto significa que el sistema es impredecible a largo plazo. Cuando el atractor es caótico, las trayectorias divergen en promedio, a una tasa exponencial denominada *máximo exponente de Lyapunov* [53], y está definido como

$$\lambda_L = \frac{1}{\Delta t} \langle \ln d_j(i) \rangle, \quad (2.10)$$

donde los brackets $\langle \ \rangle$ denotan el promedio de todos los valores de j a lo largo de la trayectoria [51]. La presencia de un exponente positivo es suficiente para diagnosticar el caos y representa la inestabilidad local en una dirección particular.

El concepto anterior, es generalizado por el *espectro* de los exponentes de Lyapunov λ_{L_i} , con $i = (1, 2, \dots, n)$, considerando una pequeña esfera n -dimensional de condiciones iniciales, donde n es el número de ecuaciones (de manera equivalente, el número de variables de estado) utilizadas para describir el sistema. A medida que el tiempo (t) progresa, la esfera evoluciona hacia un elipsoide cuyos ejes principales se expanden (o contraen) a velocidades proporcionadas por los exponentes de Lyapunov. La suma de los exponentes es la tasa de expansión del volumen (o contracción cuando es negativo) [52] y esta dado por

$$\sum \lambda_{L_i} = \left\langle \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_n} \right\rangle. \quad (2.11)$$

Cuando $\sum \lambda_{L_i} < 0$ se dice que el sistema caótico es *disipativo*. Por el contrario, cuando $\sum \lambda_{L_i} = 0$ el sistema caótico es *conservativo* ya que el espectro de Lyapunov es simétrico. Los mapas unidimensionales se caracterizan por un único exponente Lyapunov que es positivo para el caos, cero para una órbita marginalmente estable y negativo para una órbita periódica. El espectro de exponentes de Lyapunov contiene más información sobre la dinámica que el exponente más grande en sí mismo. Teniendo en cuenta que cada exponente puede ser negativo, cero o positivo, y que su suma no puede ser positiva para un sistema limitado, y que al menos un exponente debe ser cero excepto por un punto atractor, hay cinco combinaciones

λ_{L_1}	λ_{L_2}	λ_{L_3}	λ_{L_4}	λ_{L_n}	Atractor	D_{KY}	Dinámica	
0	0	0	−	...	−	Atracción de 3-toros	2	Periódico
+	+	0	−	...	−	Extraño	3	Hipercaótico
+	0	0	−	...	−	Extraño	3	Caótico
+	0	−	−	...	−	Extraño	3	Caótico

 Tabla 2.2: Exponentes de Lyapunov para los diferentes atractores en \mathbb{R}^n .

posibles para un sistema tridimensional espacio de estado como se muestra en la Tabla 2.1. Sin embargo, los tipos de atractores posibles para sistemas disipativos de n -dimensiones se muestran en la Tabla 2.2.

El espectro de Lyapunov está estrechamente relacionado con la dimensión fraccional del atractor extraño asociado. Hay un número de diferentes cantidades parecidas a dimensiones fraccionarias, que incluyen la dimensión fractal, la dimensión de información y el exponente de correlación; la diferencia entre ellos es a menudo pequeña [54]. Kaplan y Yorke [55, 56] definieron que la dimensión se relaciona con el espectro de Lyapunov por la ecuación:

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_{L_i}}{|\lambda_{L_{j+1}}|}, \quad (2.12)$$

donde j se define por la condición que

$$\sum_{i=1}^j \lambda_{L_i} > 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_{L_i} < 0. \quad (2.13)$$

La relación conjeturada entre D_{KY} y los exponentes de Lyapunov parece estar satisfecha en algunos sistemas modelo. El cálculo de la dimensión de esta ecuación requiere el conocimiento de todos los exponentes de Lyapunov menos los más negativos.

Con el fin de entender y de diferenciar el trabajo desarrollado en ésta tesis con los trabajos ya existentes en la literatura, las siguientes secciones abordan de manera general el estudio de las características más importantes de los sistemas caóticos ya reportados.

Primeramente, se presentan los atractores caóticos *auto-excitados*; estos tienen un número determinado de puntos de equilibrio. La existencia de caos en estos sistemas se puede demostrar a través de diversas técnicas como: el espectro de los exponentes de Lyapunov, diagramas de bifurcación o mapas de Poincaré. Sin embargo, en algunos casos es necesario determinar la naturaleza o el tipo de comportamiento caótico de un sistema dinámico. Uno de los criterios analíticos comúnmente utilizados para demostrar el caos en los sistemas autónomos se basa en el trabajo de Shilnikov. El caos resultante se llama tipo de *herradura* o *caos de Shilnikov* [21, 22]. Estas herraduras dan un comportamiento extremadamente complicado que se observa típicamente en los sistemas caóticos con equilibrio.

Por otro lado, se presentan los diferentes sistemas caóticos con atractores *ocultos*. Simi-

2.4. Sistemas caóticos con equilibrio

larmente, es posible encontrar comportamiento caótico mediante las técnicas mencionadas. Sin embargo, el criterio de Shilnikov no es posible aplicarlo, por lo que es necesario recurrir al procesamiento de las series temporales de los estados del sistema, tales como el máximo exponente de Lyapunov o la complejidad de la serie temporal mediante el método de entropía.

2.4 Sistemas caóticos con equilibrio

2.4.1 Criterio de Shilnikov

Considere el sistema autónomo tridimensional

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.14)$$

donde el vector $f \in \mathbb{R}^3$ es suave y diferenciable C^r ($r \geq 1$), $x \in \mathbb{R}^3$ es la variable de estado del sistema, y $t \in \mathbb{R}$ es el tiempo. Suponga que f tiene al menos un punto de equilibrio hiperbólico P .

Definición 2.6 Órbita homoclínica [57]

Una órbita homoclínica $\gamma(t)$ se refiere a una trayectoria acotada del sistema (2.14) que es doblemente asintótica a un punto de equilibrio P del sistema, es decir

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = P$$

Definición 2.7 Órbita heteroclínica [57]

Una órbita heteroclínica $\delta(t)$ se define de forma similar, excepto que hay dos focos-silla distintos P_1 y P_2 conectados por la órbita, uno correspondiente al límite de tiempo asintótico hacia adelante y el otro al límite de tiempo asintótico hacia atrás, es decir

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = P_1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = P_2$$

Dadas las definiciones anteriores, es posible establecer el criterio de Shilnikov que se resume en los siguientes teoremas:

Teorema 2.2 Teorema homoclínico de Shilnikov [57]

Asuma las siguientes sentencias:

- (i) El punto de equilibrio P es un foco-silla con eigenvalores $\{\lambda, \rho \pm i\omega\}$, y $|\lambda| > |\rho|$.

(ii) Existe una órbita homoclínica basada en P .

Entonces, (1) El mapa de Shilnikov, definido en una vecindad de la órbita homoclínica del sistema, posee un número contable de herraduras de Smale en su dinámica discreta. (2) Para cualquier C^1 - perturbación g de f suficientemente pequeña, el sistema perturbado $\dot{x} = g(x)$ tiene al menos un número finito de herraduras de Smale en su dinámica discreta del mapa de Shilnikov definido cerca de la órbita homoclínica. (3) Tanto el sistema original (2.14) como el sistema perturbado exhiben caos de herradura.

Teorema 2.3 Teorema heteroclínico de Shilnikov [57]

Suponga que dos puntos de equilibrio distintos, denotados por P_1 y P_2 , respectivamente, del sistema (2.14) son focos-silla, cuyos eigenvalores $\{\lambda_k, \rho_k \pm i\omega_k\}$, ($k = 1, 2$) satisfacen la siguiente desigualdad de Shilnikov: $\rho_1\rho_2 > 0$, o $\lambda_1\lambda_2 > 0$. También suponga que existe una órbita heteroclínica que une P_1 y P_2 . Entonces el sistema (2.14) tiene herraduras de Smale y caos del tipo herradura.

Es importante destacar que para aplicar los teoremas anteriores el sistema dinámico debe contener puntos de equilibrio hiperbólicos, de lo contrario no es posible. En el Capítulo 1, se mencionó algunos sistemas caóticos que tienen un determinado número de puntos de equilibrio y son presentados en la Tabla 2.3. Observe que éstos sistemas caóticos tienen eigenvalores tipo foco-silla, es decir, sus puntos de equilibrio son hiperbólicos y por lo cual es posible obtener caos de Shilnikov. Además, los exponentes de Lyapunov de cada sistema demuestran que son caóticos. Sus atractores en el espacio de estados se muestran en la Figura 2.3.

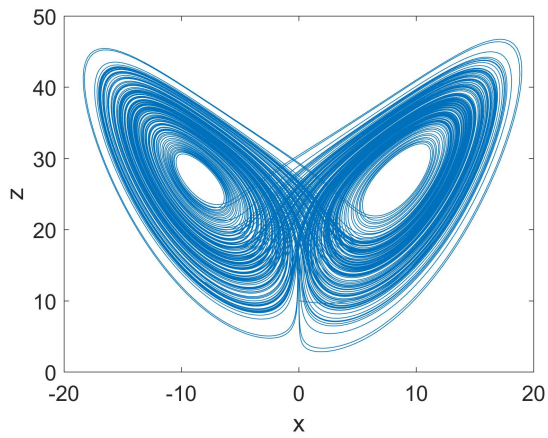
	Ecuaciones	Eigenvalores	Equilibrio	LEs
Lorenz [1]	$\dot{x} = \sigma(y - x)$			0.9053
	$\dot{y} = Rx - xz - y$	$\{11.82, -2.66, -22.82\}$	$P_1 = (0, 0, 0)$	0
	$\dot{z} = xy - \beta z$	$\{-13.85, 0.09 \pm 10.19i\}$	$P_2 = (6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$	
			$P_3 = (-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$	-14.5721
	$\sigma = 10, \quad R = 28,$ $\beta = 8/3$			
Chen [10]	$\dot{x} = a(y - x)$			2.0239
	$\dot{y} = (c - a)x - xz + cy$	$\{-3, -11.36, -24.63\}$	$P_1 = (0, 0, 0)$	0
	$\dot{z} = xy - bz$	$\{-7.93, -15.53 \pm 26.42i\}$	$P_2 = (3\sqrt{7}, 3\sqrt{7}, 21)$	
			$P_3 = (-3\sqrt{7}, -3\sqrt{7}, 21)$	-12.0239
	$a = 35, \quad b = 3,$ $c = 28$			

Continúa en la página siguiente.

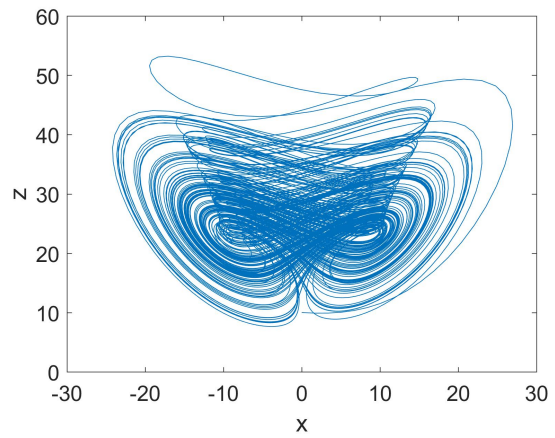
2.4. Sistemas caóticos con equilibrio

	Ecuaciones	Eigenvalores	Equilibrio	LEs
Lü [11]	$\dot{x} = a(y - x)$ $\dot{y} = -xz + cy$ $\dot{z} = xy - bz$ $a = 36, \quad b = 3,$ $c = 20$	$\{-36, 20, 3\}$ $\{-22.65, 1.82 \pm 13.68i\}$	$P_1 = (0, 0, 0)$ $P_2 = (2\sqrt{15}, 2\sqrt{15}, 20)$ $P_3 = (-2\sqrt{15}, -2\sqrt{15}, 20)$	1.3516 0 -20.3505
Chua [12]	$\dot{x} = \alpha(y - x - f(x))$ $\dot{y} = x - y + z$ $\dot{z} = -\beta y$ $\alpha = 9, \quad \beta = 14 \frac{2}{7}$ $f(x) = \begin{cases} bx + a - b, & x > 1 \\ ax, & x \leq 1 \\ bx - a + b, & x < -1 \end{cases}$ $a = -8/7, \quad b = -5/7$	$\{-3.97, 0.20 \pm 2.97i\}$ $\{2.24, -0.98 \pm 2.62i\}$	$P_1 = (1.5, 0, -1.5)$ $P_2 = (0, 0, 0)$ $P_3 = (-1.5, 0, 1.5)$	0.3302 0 -2.5198
Rössler [13]	$\dot{x} = -(y + z)$ $\dot{y} = x + ay$ $\dot{z} = b + z(x - c)$ $a = 0.2, \quad b = 0.2,$ $c = 5.7$	$\{-5.69, 0.10 \pm 0.99i\}$ $\{0.19, -0.0004 \pm 5.42i\}$	$P_1 = (0.007, -0.035, -0.035)$ $P_2 = (5.692, -28.464, 28.464)$	0.0715 0 -5.3978
SprottB [14]	$\dot{x} = yz$ $\dot{y} = x - y$ $\dot{z} = 1 - xy$	$\{-1.35, 0.17 \pm 1.20i\}$	$P_1 = (1, 1, 0)$ $P_2 = (-1, -1, 0)$	0.2070 0 -1.2065

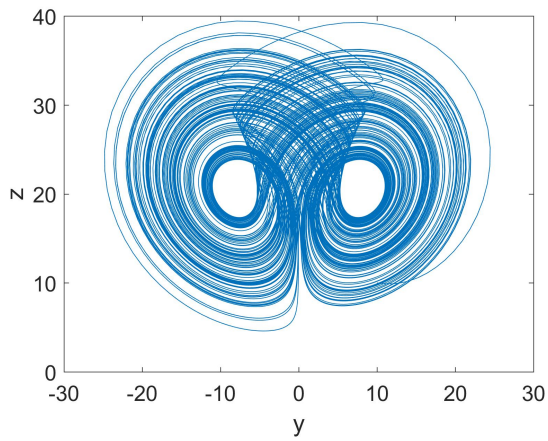
Tabla 2.3: Sistemas caóticos con puntos de equilibrio.



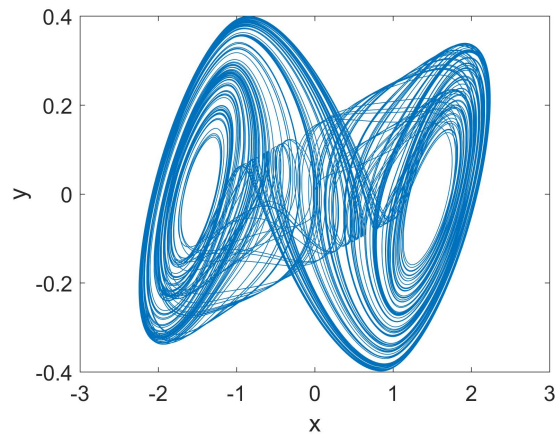
(a) Lorenz



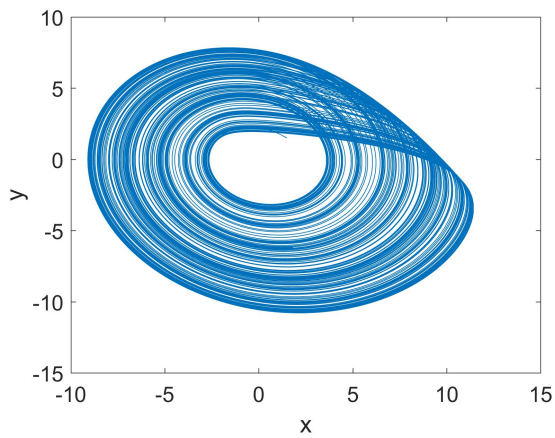
(b) Chen



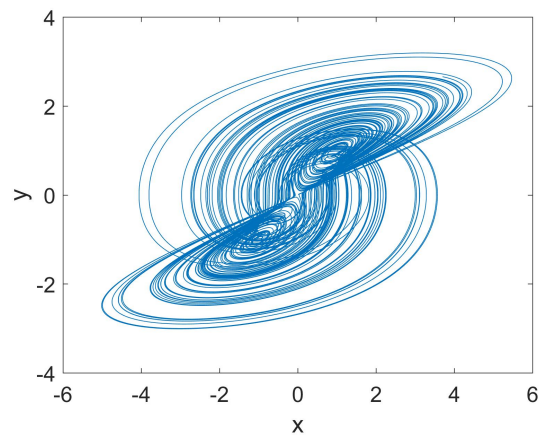
(c) Lü



(d) Chua



(e) Rössler



(f) SprottB

Figura 2.3: Diagramas de los atractores caóticos de los sistemas de la Tabla 2.3.

2.5 Sistemas caóticos con atractores ocultos

De manera similar, en este apartado se revisan las características más importantes de algunos sistemas caóticos con atractores ocultos que se mencionaron en el Capítulo 1. La mayoría de los autores se han dedicado a encontrar atractores caóticos ocultos a través de una búsqueda sistemática de caos en sistemas autónomos. Dichos sistemas están diseñados de modo que se obtenga el tipo de equilibrio deseado: sin equilibrio, número infinito de equilibrios o un equilibrio estable. Estos sistemas se consideran no hiperbólicos, debido a que al menos uno de sus eigenvalores tiene parte real igual a cero.

2.5.1 Sistemas sin equilibrio

El primer sistema caótico sin equilibrio fue reportado por Sprott [14] (conocido como el sistema A de Sprott). Se dice que este sistema es conservativo, ya que sus exponentes de Lyapunov son simétricos y la suma de ellos son cero. A partir del descubrimiento de éste, otros autores han diseñado sistemas similares como variantes del sistema de Sprott, tal es el caso de [24, 28]. Es importante mencionar que existen más sistemas sin equilibrio que son conservativos, tal como el sistema que desarrolló C. Wang [25]. Además, otros ejemplos de sistemas sin equilibrio se muestran en la Tabla 2.4. Observe que en algunos sistemas es posible obtener sus eigenvalores a través de la matriz Jacobiana, y por lo menos uno de ellos tiene parte real igual a cero; mientras que en el resto de ellos no se pueden obtener, ya que su matriz Jacobiana no lo permite. La Figura 2.4 muestra los atractores ocultos correspondientes a los sistemas de la Tabla 2.4.

	Ecuaciones	Eigenvalores	(x_0, y_0, z_0)	LEs
Sprott A [14]	$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + yz \\ \dot{z} &= 1 - y^2 \end{aligned}$	$\left\{ 0, \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2} \right\}$	(0, 5, 0)	0.014 0 -0.014
V. T. Pham [24]	$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + yz \\ \dot{z} &= -x - axy - bxz + c \end{aligned}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; width: fit-content; margin-top: 5px;"> $a = 15, \quad b = 1, \quad c = -0.001$ </div>	$\left\{ 0, \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2} \right\}$	(0, 0.5, 0.5)	0.0748 0 -0.5514
C. Wang [25]	$\begin{aligned} \dot{x} &= ay \\ \dot{y} &= -bx - cy + yz \\ \dot{z} &= -y^2 + k \end{aligned}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; width: fit-content; margin-top: 5px;"> $a = 2, \quad b = 5, \quad c = 10$ $k = 15$ </div>	$\left\{ 0, \frac{-10 + z \pm \sqrt{z^2 - 20z + 60}}{2} \right\}$	(-2, 1, 1)	0.1256 0 -0.1259

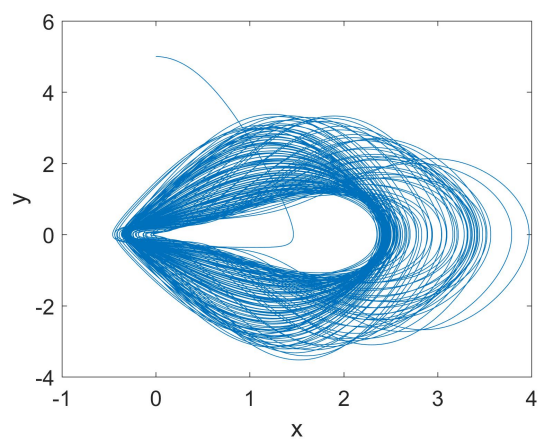
Continúa en la página siguiente.

	Ecuaciones	Eigenvalores	(x_0, y_0, z_0)	LEs
A. T. Azar [26]	$\dot{x} = y$ $\dot{y} = z$ $\dot{z} = -a x - y + 3y^2 - xz - b$ $a = 0.35, \quad b = 0.05$	{}	(0.1, 0.1, 0.1)	0.0574 0 -0.3561
Z. Wei [27]	$\dot{x} = -y$ $\dot{y} = cx + z$ $\dot{z} = ay^2 + xz - d$ $a = 2, \quad c = 1, \quad d = 0.35$	{}	(-1.6, 0.82, 1.9)	0.0782 0 -1.5012
S. Jafari ₁₆ [28]	$\dot{x} = y$ $\dot{y} = z$ $\dot{z} = -y - xz - yz - a$ $a = 0.75$	$\left\{0, \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right\}$	(0, 3, -0.1)	0.0593 0 -0.1867

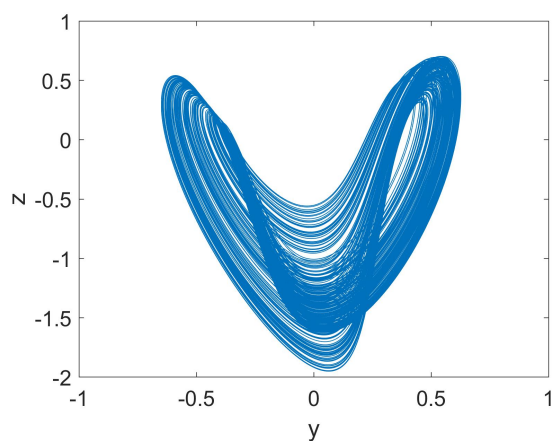
Tabla 2.4: Sistemas caóticos sin equilibrio.

En la tabla anterior los sistemas son identificados por el nombre del autor. Sin embargo, algunos autores propusieron más de un sistema por lo que en este documento se identifica por un subíndice que indica el número de sistema en la referencia dada.

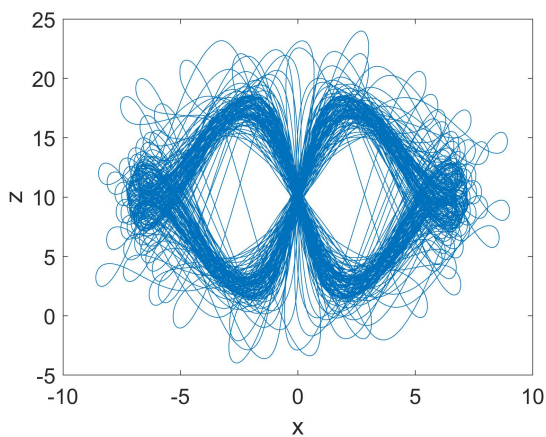
2.5. Sistemas caóticos con atractores ocultos



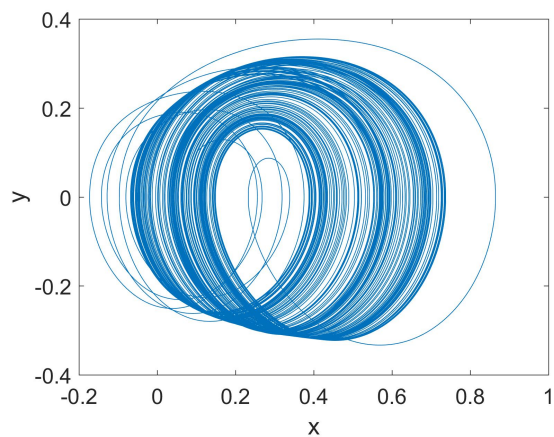
(a) Sprott A



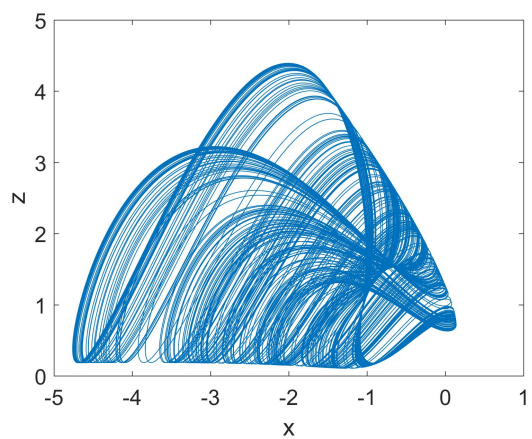
(b) V. T. Pham



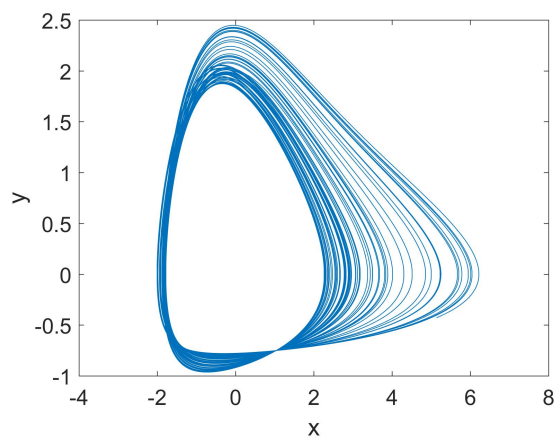
(c) C. Wang



(d) A. T. Azar



(e) Z. Wei



(f) S. Jafari

Figura 2.4: Diagramas de los atractores caóticos de los sistemas sin equilibrio de la Tabla 2.4.

2.5.2 Sistemas con un número infinito de equilibrios

Existen dos principales ramas de investigación relacionadas a los sistemas caóticos con un número infinito de puntos de equilibrio:

- (i) Sistemas que contienen una línea de equilibrios, donde uno de los estados (o ejes) del sistema contiene los puntos de equilibrio. Se han reportado sistemas que además de contener una línea de equilibrios también se encuentran algunos puntos de equilibrio fijos. Por otro lado, existen sistemas caóticos donde se tienen dos líneas paralelas infinitas de equilibrios [58].
- (ii) Se ha descubierto una nueva clase de sistemas caóticos que se caracterizan por tener un equilibrio en forma circular, un equilibrio en forma cuadrada, equilibrio en forma de rectángulo o un equilibrio de forma de elipse [59–62].

Este apartado aborda solamente el caso de sistemas con líneas de equilibrio que se presentan en la Tabla 2.5 (se han incluido algunos ejemplos donde el sistema es hipercaótico) y sus atractores en el espacio fase se muestran en la Figura 2.5. Como ya se mencionó anteriormente, en cada sistema existe por lo menos un eigenvalor que tiene parte real igual a cero.

	Ecuaciones	Eigenvalores	Equilibrio	(x_0, y_0, z_0)	LEs
P. Zhou [33]	$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 36(x_2 - x_1) + x_4 \\ \dot{x}_2 &= cx_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -3x_3 + x_1x_2 \\ \dot{x}_4 &= 18x_1 - 0.5x_4 \end{aligned}$ $c = 14$	$\left\{ 0, -36.5, 11 \pm \sqrt{784 - 4x_1^2} \right\}$	$(x_1, 0, 0, 36x_1)$	$(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$	0.2401 0.0861 0 -25.826
S. Jafari [35]	$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + yz \\ \dot{z} &= -x - axy - bzx \end{aligned}$ $a = 15, \quad b = 1$	$\left\{ 0, \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2} \right\}$	$(0, 0, z)$	$(0, 0.5, 0.5)$	0.0725 0 -0.5228
C. Li [36]	$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + by^2 + xz \\ \dot{y} &= xz \\ \dot{z} &= -axy + yz \end{aligned}$ $a = 0.1, \quad b = 1$	$\{0, 0, z - 1\}$	$(0, 0, z)$	$(8, 0, 0.7)$	0.2429 0 -1.3995
C. Li [36]	$\begin{aligned} \dot{x} &= y + axz \\ \dot{y} &= xy - xz \\ \dot{z} &= x^2 + bxy \end{aligned}$ $a = 0.2, \quad b = 3$	$\left\{ 0, \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 100z}}{10} \right\}$ $\{0.35, -2.51 \pm 7.98i\}$	$(0, 0, z)$ $\left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{ab}, \frac{1}{ab}\right)$	$(-0.2, 0, 0)$	0.3254 0 -0.2413

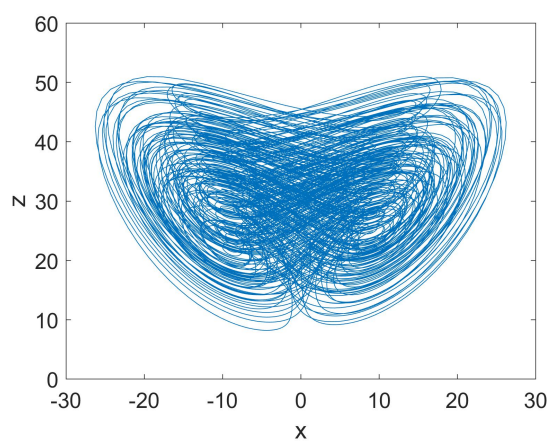
Continúa en la página siguiente.

2.5. Sistemas caóticos con atractores ocultos

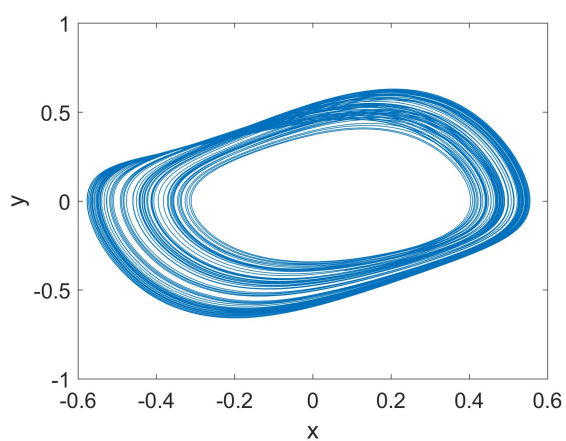
	Ecuaciones	Eigenvalores	Equilibrio	(x_0, y_0, z_0)	LEs
C. Li12 [36]	$\dot{x} = -y + x^2 - y^2$	$\{0, \pm\sqrt{z}\}$ $\{0, \pm\sqrt{-z}\}$ $\{0.56, 0.04 \pm 0.23i\}$	$(0, 0, z)$	$(0, -0.3, 2)$	0.0084
	$\dot{y} = -xz$		$(0, -1, z)$		0
	$\dot{z} = ax^2 + bxy$		$(\frac{ab}{a^2-b^2}, \frac{a^2}{b^2-a^2}, 0)$		-0.2710
	$a = 0.3, \quad b = 1$				
Q.Li [37]	$\dot{x} = -\alpha(2x + y + yz)$	$\left\{ \begin{array}{l} 0, -1, \\ W - \alpha \pm \sqrt{(W + \alpha)^2 + \alpha\beta} \end{array} \right\}$ $W = \frac{\kappa}{2}(a + 3bw^2)$	$(0, 0, w)$	$(0, 0.01, 0.01, 0)$	0.1290
	$\dot{y} = -\beta(x - xz)$				0.0145
	$\quad + \kappa y(a + 3bw^2)$				0
	$\dot{z} = -z - \gamma xy$				-10.8252
	$\dot{w} = y$				
	$\alpha = 5, \quad \beta = 6,$ $\gamma = 6, \quad \kappa = 0.1,$ $a = 1, \quad b = 2$				

Tabla 2.5: Sistemas caóticos con un número infinito de puntos de equilibrio.

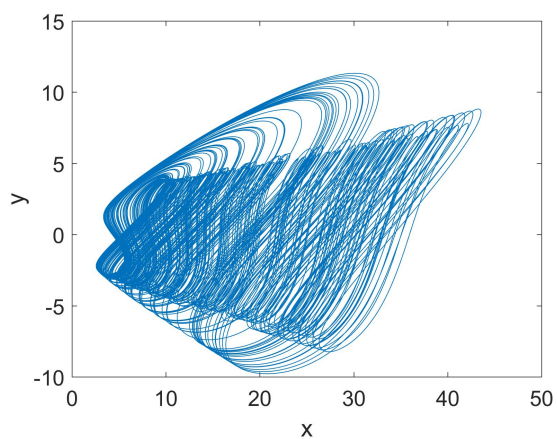
En la tabla anterior los sistemas son identificados por el nombre del autor. Sin embargo, algunos autores propusieron más de un sistema por lo que en este documento se identifica por un subíndice que indica el número de sistema en la referencia dada.



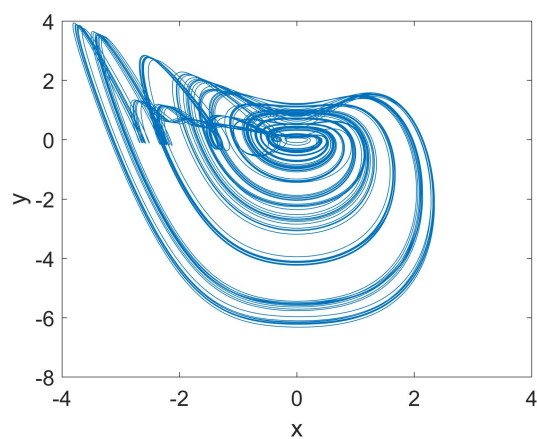
(a) Zhou



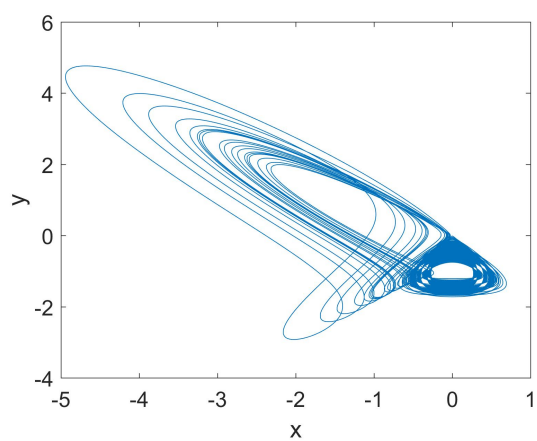
(b) Jafari₁



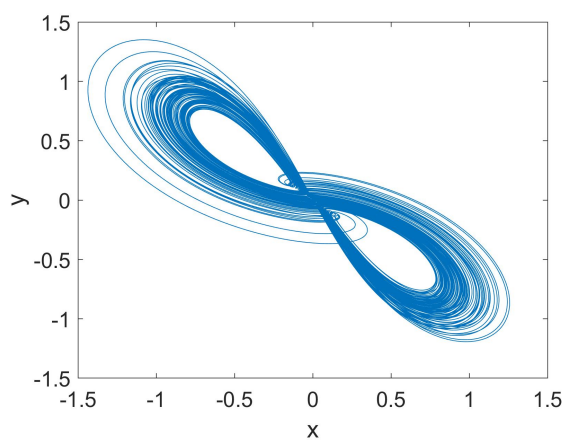
(c) Li₄



(d) Li₁₀



(e) Li₁₂



(f) Q. Li

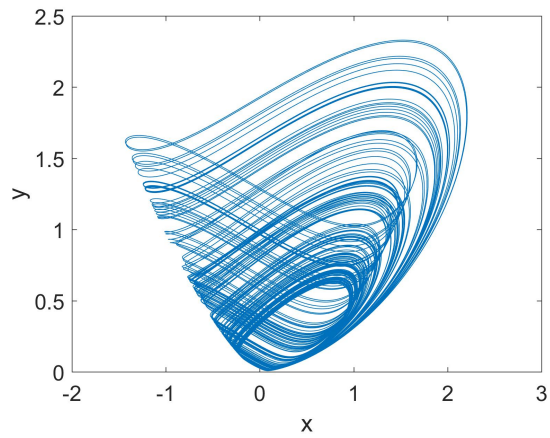
Figura 2.5: Diagramas de los atractores caóticos de los sistemas con un número infinito de equilibrios de la Tabla 2.5.

2.5.3 Sistemas con un solo equilibrio estable

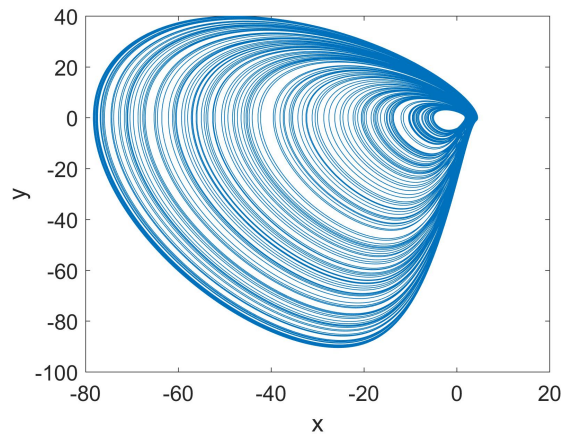
Como es bien sabido, el equilibrio de los sistemas caóticos de tipo hiperbólico están relacionados a los eigenvalores tipo foco-silla inestable. Por otro lado, ésta clasificación de sistemas con atractores ocultos son los únicos que poseen eigenvalores con parte real diferente de cero, es decir, son del tipo foco-silla estables. La siguiente Tabla presenta algunos ejemplos de sistemas caóticos con un equilibrio estable reportados en la literatura y sus atractores generados se muestran en la Figura 2.6. Observe que el sistema de Yang [44] presenta dos puntos de equilibrio estables, por lo tanto su atractor generado tiene doble-enroscado (Figura 2.6(f)).

	Ecuaciones	Eigenvalores	Equilibrio	(x_0, y_0, z_0)	LEs
Sprott E [14]	$\dot{x} = yz$	$\{ -1, \pm 0.25i \}$	$(0.25, 0.0625, 0)$	$(0.1, 0.1, 0.1)$	0.0767
	$\dot{y} = x^2 - y$				0
	$\dot{z} = 1 - 4x$				-1.0767
Molaei10 [39]	$\dot{x} = y$	$\{ -2, -0.025 \pm 0.99i \}$	$(0, 0, -0.05)$	$(3.9, 0, 1)$	0.0957
	$\dot{y} = -x + yz$				0
	$\dot{z} = x - 0.3y - 2z + xz - 0.1$				-15.6414
Lao [40]	$\dot{x} = -z$	$\{ -1.97, -0.01 \pm 0.81i \}$	$(0, 0, 0)$	$(-0.1, 3.4, -1.7)$	0.0540
	$\dot{y} = -x - z$				0
	$\dot{z} = 2x - 1.3y - 2z + x^2 + z^2 - xz$				-2.0540
Kingni [41]	$\dot{x} = -z$	$\{ -0.76, -0.004 \pm 1.30i \}$	$(0, \frac{b}{a}, 0)$	$(0.7, 2.3, -1.5)$	0.09
	$\dot{y} = -x - z$				0
	$\dot{z} = 3x - ay + x^2 - z^2 - yz + b$				-1.2996
$a = 1.3, \quad b = 1.01$					
Pham [42]	$\dot{x} = y$	$\{ -0.019, -0.04 \pm 0.19i \}$	$(-0.25, 0, -0.2)$	$(-1.53, 0.33, 0.39)$	0.0070
	$\dot{y} = 0.4xz - a$				0
	$\dot{z} = 0.3y - 0.1z - 1.4y^2 - bxy - c$				-0.1063
$a = 0.002, \quad b = 0.2$ $c = 0.002$					
Yang [44]	$\dot{x} = a(y - x)$	$\{ -20, -0.11 \pm 9.76i \}$	$(\pm\sqrt{b}, \pm\sqrt{b}, -c)$	$(0.98, -1.82, -0.49)$	0.8391
	$\dot{y} = -cy - xz$				0
	$\dot{z} = xy - b$				-20.8387
$a = 10, \quad b = 100,$ $c = 11.2$					

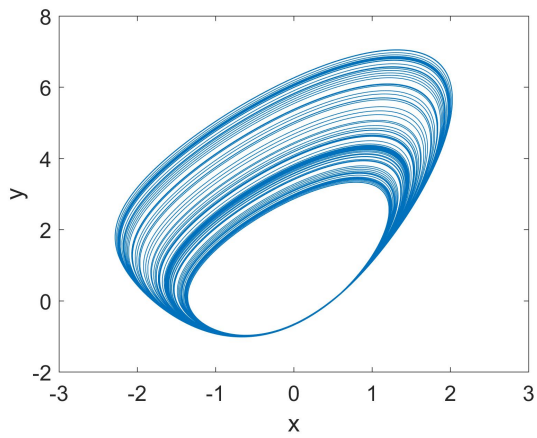
Tabla 2.6: Sistemas caóticos con un equilibrio estable.



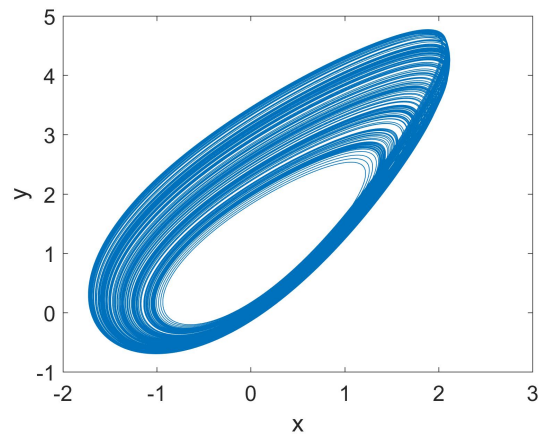
(a) Sprott E



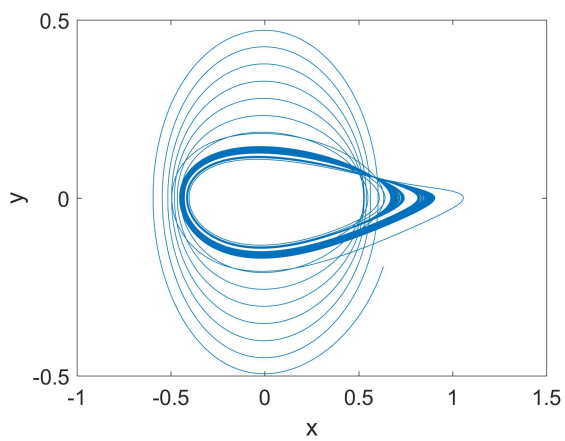
(b) Molaie₁₀



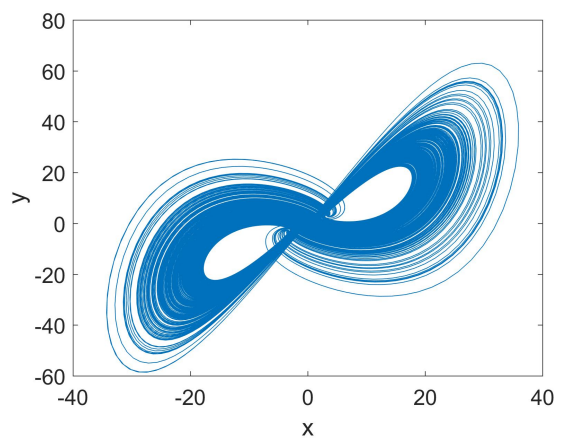
(c) Lao



(d) Kingni



(e) Pham



(f) Yang

Figura 2.6: Diagramas de los atractores caóticos de los sistemas con un equilibrio estable de la Tabla 2.6.

Capítulo 3

Sistemas lineales conmutados con atractores ocultos

Este capítulo está dedicado al desarrollo de atractores ocultos generados por la conmutación de sistemas lineales. Primeramente, se presenta el estudio del equilibrio de un sistema lineal y sus características principales. Considere un sistema dinámico lineal en tres dimensiones dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B, \quad (3.1)$$

donde el vector de la variable de estado es $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, el vector de términos independientes está representado como $B = (b_1, b_2, b_3)$ y el operador lineal $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ está dado por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Suponga que el sistema (3.1) es disipativo, es decir, la suma de sus eigenvalores es negativa; y tiene variedades estables (W^s) e inestables (W^u). El comportamiento del sistema está definido a través de los eigenvalores de A , los cuales se obtienen del polinomio característico

$$g(\lambda) = \lambda^3 - \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta \quad (3.3)$$

donde $\beta = \text{tr}(A)$, $\gamma = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32}$ y $\delta = \det(A)$. Los coeficientes anteriores determinan los eigenvalores del sistema (3.1) por medio del

discriminante de $g(\lambda)$, definido como sigue

$$\Delta = 18\beta\gamma\delta - 4\beta^3\delta + \beta^2\gamma^2 - 4\gamma^3 - 27\delta^2, \quad (3.4)$$

del cual se destacan tres casos: **(1)** si $\Delta > 0$, el sistema tiene tres diferentes eigenvalores reales distintos de cero; **(2)** si $\Delta = 0$, el sistema tiene múltiples eigenvalores reales pero diferentes de cero; y por último **(3)** si $\Delta < 0$, sistema tiene un eigenvalor real y un par de eigenvalores complejos conjugados.

Un punto de inicio para analizar el equilibrio del sistema (3.1) es determinar la solución del sistema lineal algebraico

$$A\mathbf{x} + B = 0, \quad (3.5)$$

ya que ambos conceptos están fuertemente relacionados. El Teorema de Rouché-Frobenius hace uso de la matriz aumentada $(A|B)$, y proporciona las condiciones necesarias para establecer dicha solución. El concepto de equilibrio y teorema se relacionan de la siguiente forma:

1. El sistema lineal (3.5) tiene solución única si y solo si $rank(A) = 3$ y $rank(A|B) = 3$, en otras palabras, existe solución única si A es una matriz no singular. Por consiguiente, el sistema dinámico (3.1) tiene un punto de equilibrio hiperbólico dado por $x^* = -A^{-1}B$ y todos los eigenvalores de la matriz A tienen parte real distinta de cero. Entonces, el sistema (3.1) se denomina *sistema lineal hiperbólico*.
2. El sistema lineal (3.5) tiene múltiples soluciones si $rank(A) = rank(A|B) < 3$, esto significa que la matriz A es singular. En consecuencia, el sistema dinámico (3.1) tiene un número infinito de puntos de equilibrio. Debido a que el coeficiente $\delta = 0$ en (3.4) y $\Delta < 0$, el *sistema es no hiperbólico* ya que al menos uno de sus eigenvalores tiene parte real cero.
3. Finalmente, el sistema lineal (3.5) no tiene solución si $rank(A) \neq rank(A|B)$, es decir, $det(A) = 0$. Así, el sistema dinámico (3.1) no tiene equilibrio y es *no hiperbólico* ya que al menos uno de sus eigenvalores tiene parte real cero.

La primera afirmación del teorema mencionado anteriormente es la principal característica de un atractor *auto-excitado*, ya que su cuenca de atracción se interseca con la vecindad del punto de equilibrio. Por otro lado, las últimas dos afirmaciones están relacionadas con los *atractores ocultos*, lo que significa que la cuenca de atracción no se interseca con los vecindarios de los equilibrios. Es importante mencionar que los sistemas con un solo equilibrio estable cumplen con la primera afirmación del teorema de Rouché-Frobenius, sin embargo, generan atractores ocultos.

Las afirmaciones anteriores son consideradas a lo largo del desarrollo de éste trabajo, ya que

3.1. Sistema caótico conmutado sin equilibrio

se pretende generar atractores caóticos a través de la conmutación de sistemas lineales no hiperbólicos.

3.1 Sistema caótico conmutado sin equilibrio

El diseño de un sistema conmutado sin equilibrio se establece a partir de la conmutación de dos sistemas lineales según la Ec. (3.1), los cuales son gobernados por una ley de conmutación. Cada sistema lineal $A_i \mathbf{x} + B_i$ pertenece a un dominio $D_i \subseteq \mathbb{R}^3$, donde la matriz A_i debe ser singular, en otras palabras, el $\det(A_i) = 0$.

Asuma que el flujo del sistema esta dado por $\mathbf{x}(t) = \phi(x_0) \in \mathbb{R}^3$ para $t \geq 0$. Además, asuma que dicho sistema es disipativo y que genera un atractor. Debido a que las matrices A_i son singulares, el polinomio característico asociado (3.3) tiene término constante $\delta = 0$. En consecuencia, existe un eigenvalor $\lambda = 0$. Por lo tanto, si el flujo $\phi(t)$ tiene un comportamiento oscilante los eigenvalores restantes λ_i deben ser complejos conjugados.

Como caso de estudio, considere el siguiente sistema conmutado definido como

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1 \mathbf{x} + B_1, & \text{si } x_1 \geq 0 \\ A_2 \mathbf{x} + B_2, & \text{si } x_1 < 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

El dominio de dicho sistema esta representado por \mathcal{D}_1 cuando $x_1 \geq 0$ y \mathcal{D}_2 cuando $x_1 < 0$; el vector de estado x , y los vectores de términos independientes B_1 y B_2 están definidos en la Ec. (3.1). Finalmente, las matrices A_1 y A_2 son definidas por

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -p & q \\ 0 & -q & k \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -p & q \\ 0 & -q & -k \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Aunque ambas matrices son similares, se puede observar que ambas contienen un vector columna de ceros, esto significa que $\det(A_1) = \det(A_2) = 0$. Esto nos lleva directamente a la tercera afirmación del teorema de Rouché-Frobenius, si y solo sí los elementos de B_1 y B_2 son distintos de cero. En consecuencia, se garantiza que el sistema conmutado(3.6) no tiene equilibrio.

Para que dicho sistema presente un comportamiento caótico, primeramente, el problema del valor inicial debe tener una solución de tipo oscilatoria. El polinomio característico de cada una de las matrices está dado por

$$\begin{cases} g_1(\lambda) = \lambda^3 + (p - k)\lambda^2 + (q^2 - kp)\lambda, & \implies \mathcal{D}_1 \\ g_2(\mu) = \mu^3 + (p + k)\mu^2 + (q^2 + kp)\mu, & \implies \mathcal{D}_2 \end{cases} \quad (3.8)$$

Dado que el discriminante del polinomio característico de cada matriz se calcula como

$\Delta = \beta^2\gamma^2 - 4\gamma^3 < 0$, los eigenvalores correspondientes al dominio \mathcal{D}_1 son

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{(k-p) \pm \sqrt{(p-k)^2 - 4(q^2 - kp)}}{2}$$

mientras que los eigenvalores asociados al dominio \mathcal{D}_2 se definen como

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_{2,3} = \frac{-(p+k) \pm \sqrt{(p+k)^2 - 4(q^2 + kp)}}{2}.$$

Por lo tanto, para que el conjunto solución sea oscilatorio los eigenvalores anteriores mencionados deben ser focos estables o inestables. Esto es posible cuando se cumple $(p-k)^2 < 4(q^2 - kp)$ y $(p+k)^2 < 4(q^2 + kp)$, para \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 , respectivamente.

Sean los elementos $p = 0.25$ y $q = 3$ de las matrices A_1 y A_2 , y los elementos $b_1 = b_2 = 0$ y $b_3 = 0.05$ de los vectores B_1 y B_2 . Teniendo en cuenta las desigualdades anteriores, suponga que existe algún valor en el intervalo de $-\frac{23}{4} < k < \frac{23}{4}$ de tal manera que el sistema (3.6) tenga un comportamiento caótico. El valor de k se definió a través de una búsqueda sistemática asistida mediante software basada en el método propuesto en la referencia [52], el cuál consiste en encontrar tanto las condiciones iniciales como los parámetros necesarios de tal forma que los exponentes de Lyapunov o los diagramas de bifurcación muestren que el sistema dinámico presenta caos. De este modo, se encontró que el sistema (3.6) presenta caos cuando el parámetro $k = 2.3$ con las condiciones iniciales $(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}) = (0.05, 0.05, 0.05)$. Note que el discriminante del polinomio característico $g_1(\lambda)$ es $\Delta = -2093.75$, lo cual indica que los eigenvalores asociados a \mathcal{D}_1 están dados por $\lambda = \{0, 1.025 \pm 2.7155i\}$. De forma similar, el discriminante del polinomio característico $g_2(\mu)$ es $\Delta = -2915.21$ y los eigenvalores que gobiernan a \mathcal{D}_2 son $\mu = \{0, -1.255 \pm 2.8194i\}$. Además, se calculó la variación de un pequeño elemento del volumen $V(t)$ para cada dominio del sistema lineal, por lo tanto se obtuvo lo siguiente:

$$\nabla V(t) = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} = \begin{cases} 2.05, & \mathcal{D}_1 \\ -2.55, & \mathcal{D}_2. \end{cases} \quad (3.9)$$

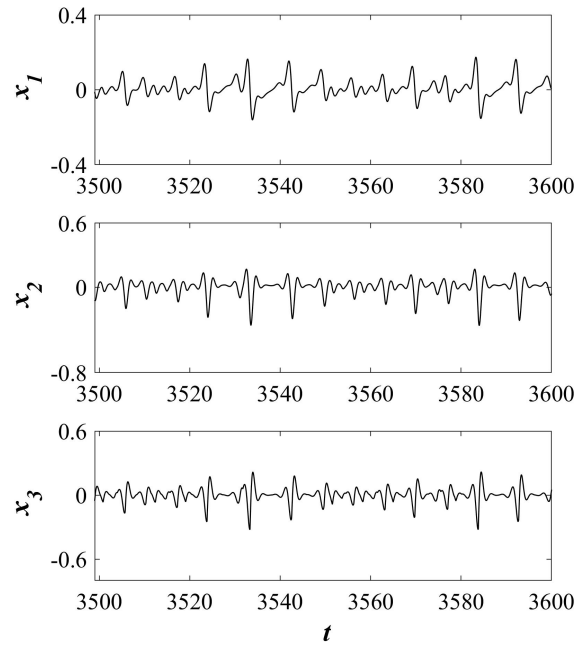
Observe que el sistema lineal de \mathcal{D}_1 es disipativo, mientras que el sistema lineal de \mathcal{D}_2 no es disipativo; así, el sistema (3.6) es globalmente estable.

En la Figura 3.1(a) se puede apreciar una sección de las series de tiempo de los estados x_1 , x_2 y x_3 , y claramente se observa que las formas de onda son caóticas. Además, los espectros de frecuencia de las series de tiempo confirman el comportamiento caótico del sistema (Figura 3.1(b)). El atractor caótico se muestra en la Figura 3.2 a través de sus diferentes diagramas de espacios fase.

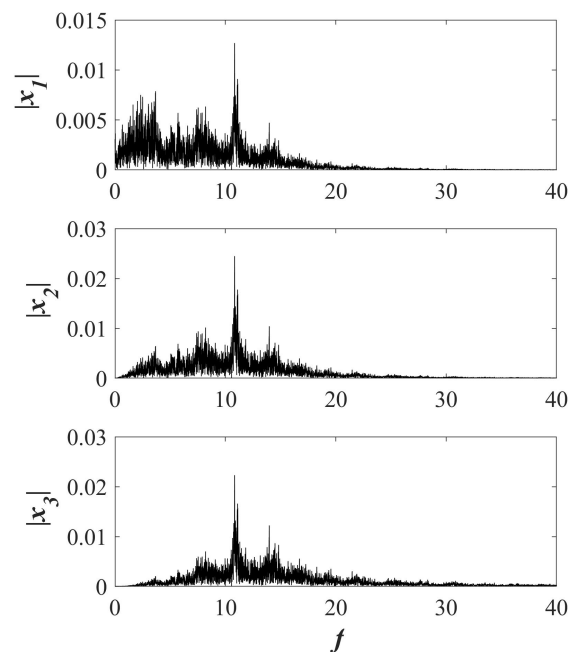
Como se mencionó en el capítulo 2, los exponentes de Lyapunov son indicadores que permiten conocer el tipo de comportamiento del sistema. Dichos exponentes se calcularon mediante el algoritmo de Wolf [50], y verificados por el algoritmo presentado en [63]. Por lo tanto, los exponentes de Lyapunov del sistema (3.6) son $\lambda_{L_1} = 0.1086$, $\lambda_{L_2} = 0$ y

3.1. Sistema caótico conmutado sin equilibrio

$\lambda_{L_3} = -0.3509$ (Figura 3.3), lo cual indica la existencia de caos. Además, se calculó la dimensión de Kaplan-York siendo $D_{KY} = 2.3065$, lo cual indica la existencia de un atractor extraño.



(a)



(b)

Figura 3.1: (a) Series de tiempo de los estados del sistema conmutado sin equilibrio. (b) Espectros de frecuencia (Hz) de las series de tiempo.

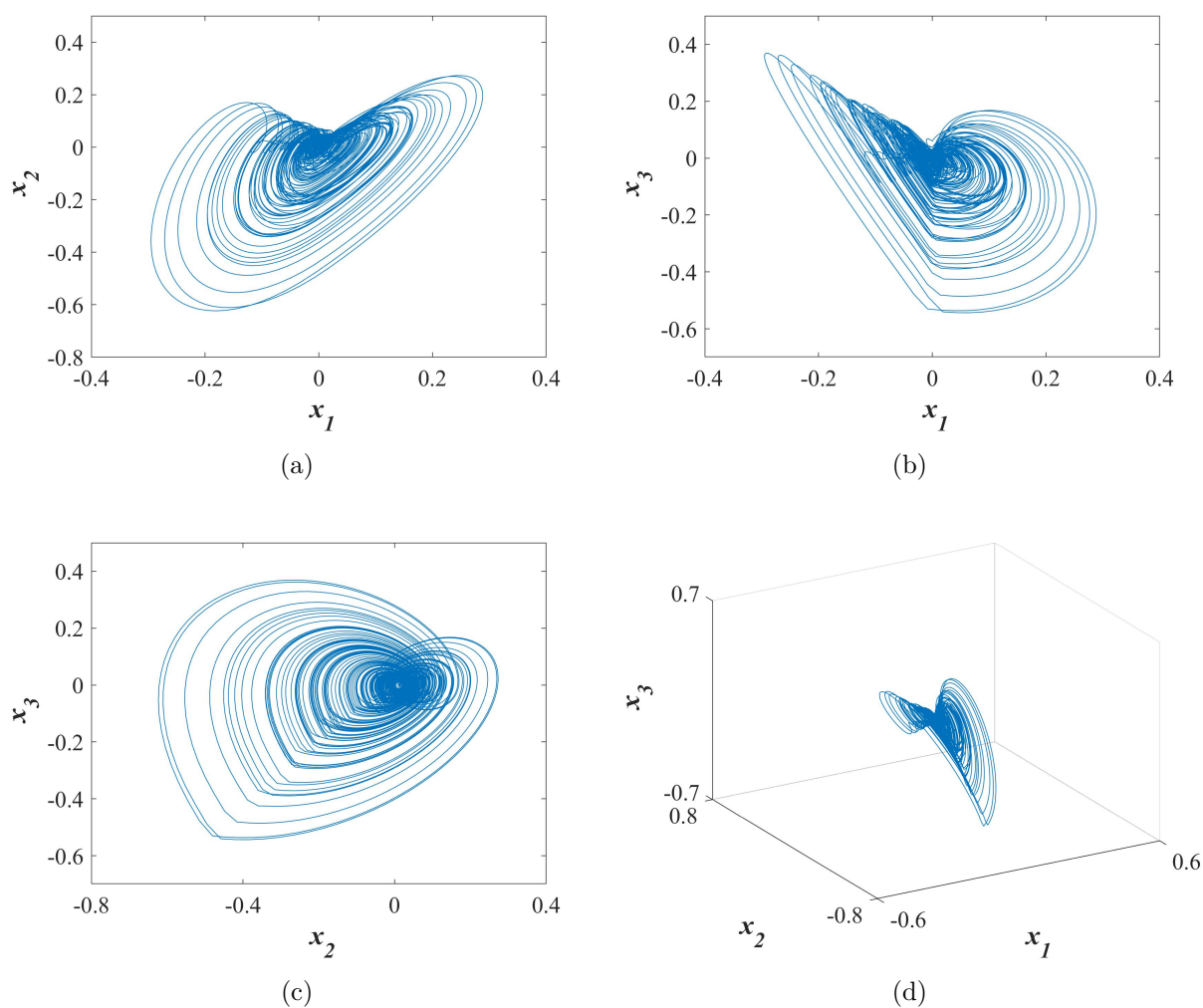


Figura 3.2: Diagramas de espacio fase del sistema conmutado sin equilibrio en el plano (a) $x_1 - x_2$, (b) $x_1 - x_3$ y (c) $x_2 - x_3$. (d) Atractor caótico en el espacio tridimensional cuando $p = 0.25$, $q = 3$ y $k = 2.3$.

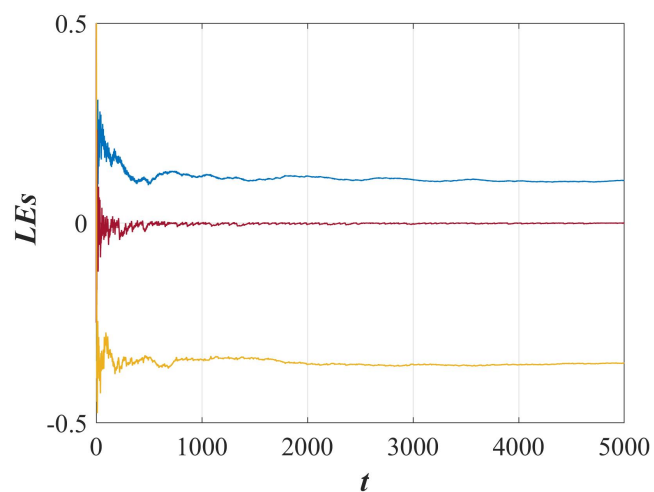


Figura 3.3: Exponentes de Lyapunov asociados al sistema conmutado sin equilibrio.

3.1. Sistema caótico conmutado sin equilibrio

Asimismo, se investigó el comportamiento de la dinámica del sistema (3.6) siendo k el parámetro de bifurcación en un intervalo de 2 a 5 cuando $p = 0.25$ y $q = 3$. La Figura 3.4 muestra el comportamiento del sistema cuando el parámetro k se varía. A pesar de que el diagrama de bifurcación no presenta ventanas de comportamiento periódico, es evidente observar en la Figura 3.4 que existe mayor densidad de órbitas en el intervalo 2.1 a 2.5 y para algunos valores del intervalo de 2.9 a 3.2, el cual podemos denominar como *región de caos*. Por consiguiente, fuera de dicho intervalo el sistema presenta comportamientos periódicos que generan atractores *ciclo límite*. Lo anterior, se verifica en la Figura 3.5 donde se muestran los exponentes de Lyapunov del sistema cuando el parámetro k se varía. Además, la Figura 3.6 presenta algunos casos cuando el sistema genera ciclos límites para valores específicos de k .

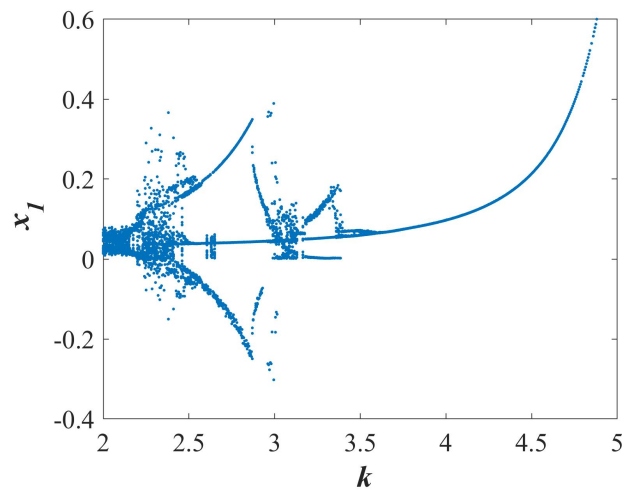


Figura 3.4: Diagrama de bifurcación del sistema caótico sin equilibrio en el intervalo $2 \leq k \leq 5$.

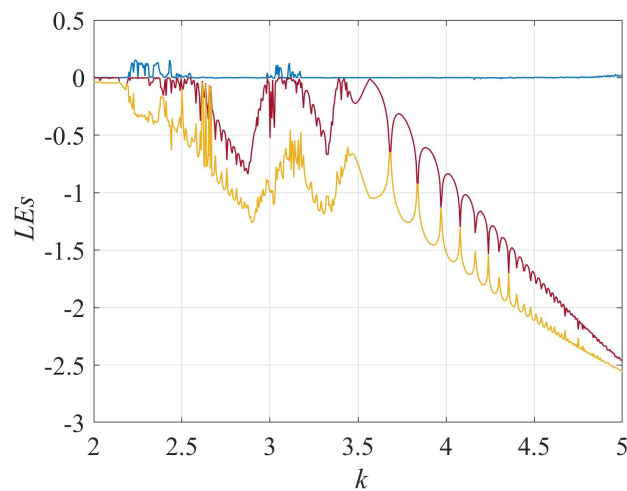


Figura 3.5: Exponentes de Lyapunov en el intervalo $2 \leq k \leq 5$.

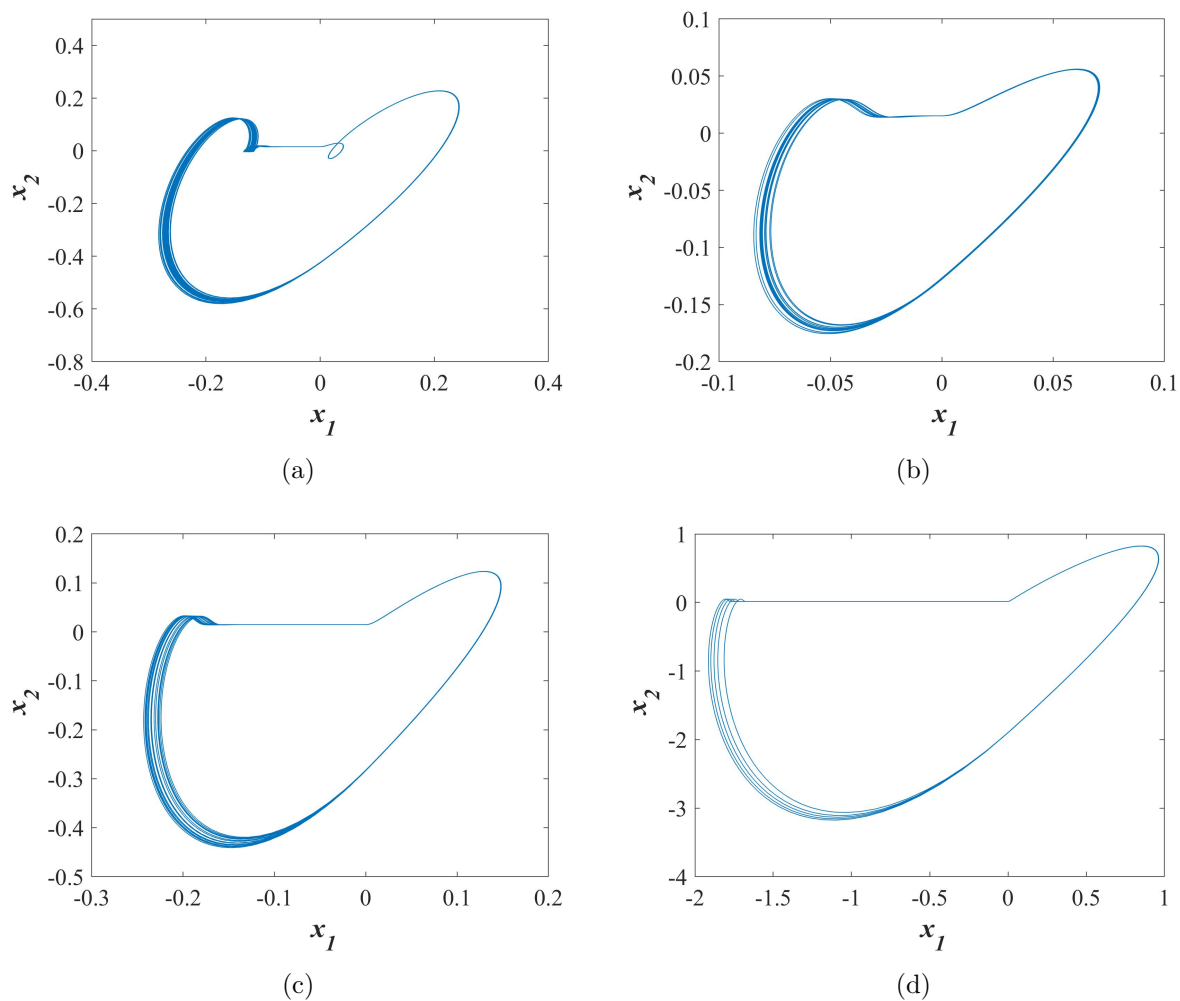


Figura 3.6: Ciclos límites del sistema conmutado sin equilibrio cuando (a) $k = 2.7$, (b) $k = 3.7$, (c) $k = 4.3$ y (d) $k = 5$.

3.2 Sistema conmutado con una línea de equilibrios

El objetivo principal de esta sección es generar un atractor oculto con una línea de equilibrios (un número infinito de puntos de equilibrio), a través de la conmutación de dos sistemas lineales. Ésto no es una tarea trivial, debido a la complejidad de establecer un sistema conmutado globalmente estable. El argumento principal es lograr la conmutación de un sistema $A_3\mathbf{x} + B_3$ con una línea de equilibrios y un sistema $A_4\mathbf{x} + B_4$ sin equilibrio. Así, globalmente el sistema conmutado tiene múltiples puntos de equilibrio, cada uno con un dominio propio $\mathcal{D}_i \subseteq \mathbb{R}^3$ con $i = 3, 4$. Considere el sistema conmutado (3.10), suponga que es disipativo y que el flujo $x(t) = \phi(x)$ tal que $\phi(t) \in \mathbb{R}^3$ genera un atractor.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A_3\mathbf{x} + B_3, & \text{si } x_1 \geq 0 \\ A_4\mathbf{x} + B_4, & \text{si } x_1 < 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

De la Ec. (3.10), el vector de estados se representa como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, los vectores de términos independientes son $B_3 = (0, 0, 0)^T$ y $B_4 = (0, 0, b_3)^T$, y las matrices A_3 y A_4 están dadas por

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -p & q \\ 0 & -k_1 & k_3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & p & q \\ 0 & -k_2 & -k_3 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

por lo que el determinante de ambas es $\det(A_3) = \det(A_4) = 0$. El dominio del sistema (3.10) esta representado como \mathcal{D}_3 cuando $x_1 \geq 0$ y \mathcal{D}_4 cuando $x_1 < 0$. Observe que el equilibrio del sistema en el dominio \mathcal{D}_3 es $E(x_1, 0, 0)$, es decir, tiene un número infinito de puntos de equilibrio debido a que se expresa en términos del estado x_1 . Lo anterior es posible si y solo si los elementos del vector B_3 son cero. El equilibrio de \mathcal{D}_3 ha sido obtenido cuando se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ -px_2 + qx_3 = 0 \\ -k_1x_2 + k_3x_3 = 0. \end{cases}$$

Por otro lado, el sistema del dominio \mathcal{D}_4 no tiene equilibrio ya que la matriz $(A_4|B_4)$ cumple con el tercer criterio de Rouché -Frobenius. Por lo tanto, el sistema conmutado (3.10) tiene un número infinito de equilibrios.

Por consiguiente, para generar caos en dicho sistema, se debe garantizar que la solución del problema de valor inicial sea oscilatorio. Por ello, los eigenvalores de los sistemas lineales de \mathcal{D}_3 y \mathcal{D}_4 deben ser focos estables o inestables. Tenga en cuenta que existe un eigenvalor $\lambda = 0$, ya que en el polinomio característico (3.3) el parámetro $\delta = 0$. Esto es de la siguiente

forma:

$$\begin{cases} g_3(\lambda) = \lambda^3 + (p - k_3)\lambda^2 + (k_1q - k_3p)\lambda, & \implies \mathcal{D}_3 \\ g_4(\mu) = \mu^3 + (k_3 - p)\mu^2 + (k_2q - k_3p)\mu, & \implies \mathcal{D}_4 \end{cases} \quad (3.12)$$

Así, los eigenvalores correspondientes a las matrices A_3 y A_4 de los dominios \mathcal{D}_3 y \mathcal{D}_4 , respectivamente, están dados por

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{(k_3 - p) \pm \sqrt{(p - k_3)^2 - 4(k_1q - k_3p)}}{2}$$

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_{2,3} = \frac{(p - k_3) \pm \sqrt{(k_3 - p)^2 - 4(k_2q - k_3p)}}{2}.$$

En consecuencia, es posible obtener el discriminante de los polinomios característicos anteriores como $\Delta = \beta^2\gamma^2 - 4\gamma^3 < 0$, cuando se cumple que $(p - k_3)^2 < 4(k_1q - k_3p)$ y $(k_3 - p)^2 < 4(k_2q - k_3p)$ en \mathcal{D}_3 y \mathcal{D}_4 , respectivamente.

Tomando en cuenta las desigualdades mencionadas anteriormente, suponga los parámetros $p = 0.25$, $q = 3$, $b_3 = 0.2$ y $k_3 = 1.75$. Sustituyendo los parámetros en las desigualdades de arriba, se encuentra que el sistema (3.10) tiene comportamientos oscilatorios cuando $k_1 > \frac{1}{3}$ y $k_2 > \frac{1}{3}$. Ahora, estamos interesados en que se genere comportamiento caótico en (3.10) por lo que se usa una búsqueda sistemática asistida por software propuesto en [52]. Por consiguiente, se encontró que el sistema es caótico cuando $k_1 = 1.9$ y $k_2 = 4.1$ con las condiciones iniciales $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (0.05, 0.05, 0.05)$. Así, el discriminante de $g_3(\lambda)$ es $\Delta = -520.645$ y los eigenvalores asociados son $\lambda = \{0, 0.75 \pm 2.1679i\}$, y el discriminante asociado a $g_4(\mu)$ es $\Delta = -6360.49$ con eigenvalores $\mu = \{0, -0.75 \pm 3.3615i\}$.

La estabilidad del sistema (3.10) se verificó al obtener la variación de un pequeño elemento de volumen $V(t)$ para cada sistema lineal conmutado, lo cual se obtuvo:

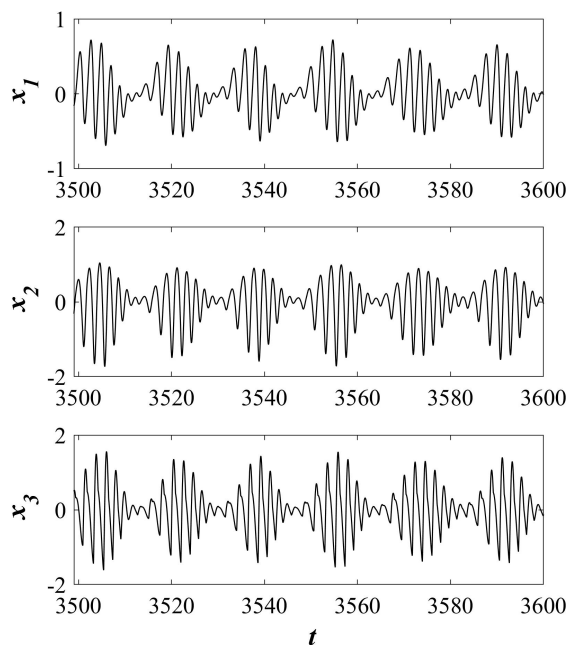
$$\nabla V(t) = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} = \begin{cases} 1.5, & \mathcal{D}_3 \\ -1.5, & \mathcal{D}_4. \end{cases} \quad (3.13)$$

Note que el sistema lineal del dominio \mathcal{D}_3 no es disipativo, mientras que el sistema lineal \mathcal{D}_4 es disipativo. Globalmente, el sistema (3.10) es estable.

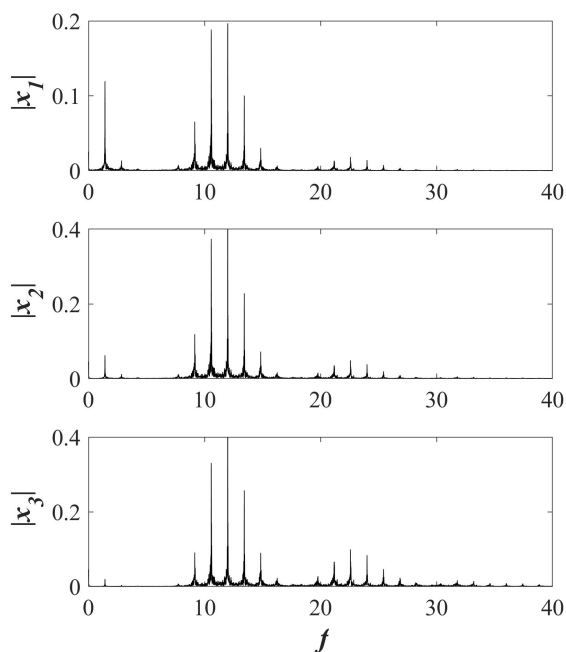
Se puede observar en la Figura 3.7(a), una ventana de tiempo del comportamiento de las series de tiempo de los estados. De modo visual, se pensaría que las series de tiempo presentadas son periódicas, pero no lo son. Los espectros de frecuencia de los estados en la Figura 3.7(b) confirman la existencia de caos en el sistema. Además, los diagramas de espacio fase en los diferentes planos del atractor caótico se muestran en la Figura 3.8. Por otro lado, los exponentes de Lyapunov demuestran que el comportamiento de los estados no es periódico, ya que su espectro está dado por $\lambda_{L_1} = 0.04298$, $\lambda_{L_2} = 0$ y $\lambda_{L_3} = -0.1129$. El comportamiento de dichos exponentes en un intervalo de tiempo de 0 a 5000 se aprecia en la Figura 3.9. Los exponentes de Lyapunov se calcularon con el algoritmo de Wolf [50]

3.2. Sistema caótico con una línea de equilibrios

y verificados con el algoritmo presentado en la referencia [63]. Finalmente, la dimensión de Kaplan-Yorke es $D_{KY} = 2.38070$ confirma la existencia de un atractor extraño en el sistema (3.10).



(a)



(b)

Figura 3.7: (a) Series de tiempo de los estados del sistema conmutado con una línea de equilibrios. (b) Espectros de frecuencia (Hz) de las series de tiempo.

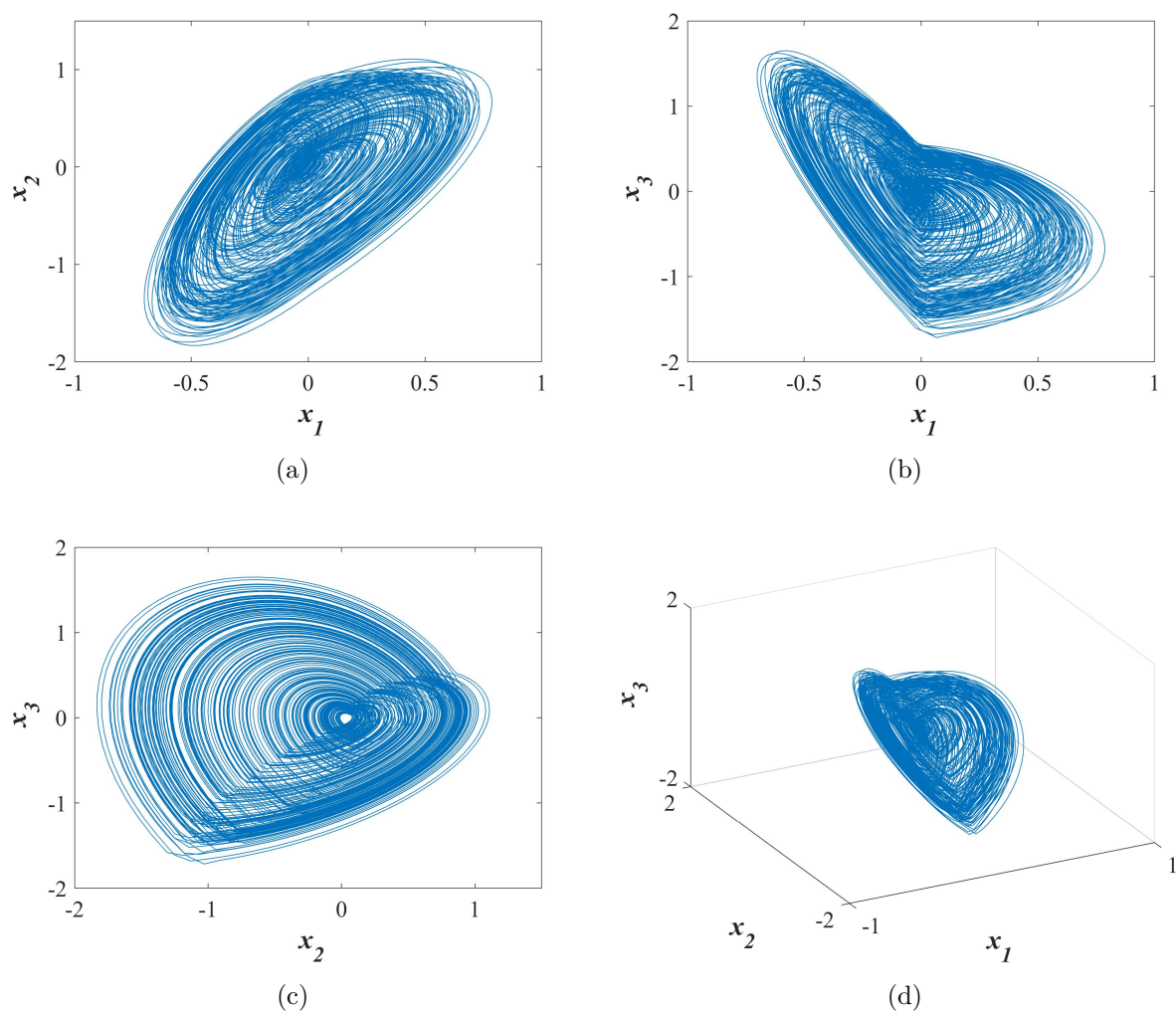


Figura 3.8: Diagramas de espacio fase del sistema conmutado con una línea de equilibrios en el plano (a) $x_1 - x_2$, (b) $x_1 - x_3$ y (c) $x_2 - x_3$. (d) Atractor caótico en el espacio tridimensional cuando $p = 0.25$, $q = 3$, $k_1 = 1.9$, $k_2 = 4.1$ y $k_3 = 1.75$.

3.2. Sistema caótico con una línea de equilibrios

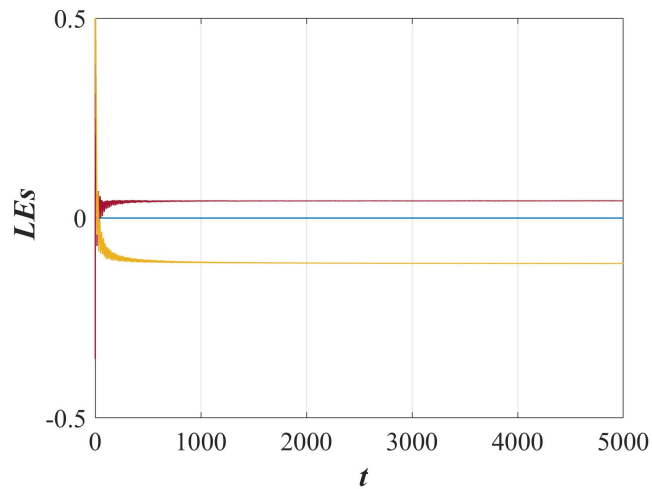


Figura 3.9: Exponentes de Lyapunov asociados al sistema conmutado con un número infinito de puntos de equilibrios.

Como en la sección anterior, se investigó el comportamiento del sistema para distintos valores de k_1 en el intervalo de 1.5 a 5 cuando $p = 0.25$, $q = 3$, $k_2 = 4.1$ y $k_3 = 1.75$. El diagrama de bifurcación de la Figura 3.10 no presenta una ruta de comportamientos de periódico tres rumbo al caos. Pero, es suficiente decir que en el intervalo donde existe mayor densidad de órbitas es la región de caos, es decir, para algunos valores de k_1 en el intervalo de 1.6 a 2.2. Sin embargo, existen atractores ciclo límite para ciertos valores de k_1 . La región de caos se puede verificar por los exponentes de Lyapunov obtenidos en el mismo intervalo para k_1 (Figura 3.11). En la Figura 3.12 se dan algunos ejemplos de atractores ciclo límite obtenidos de diferentes valores de k_1 .

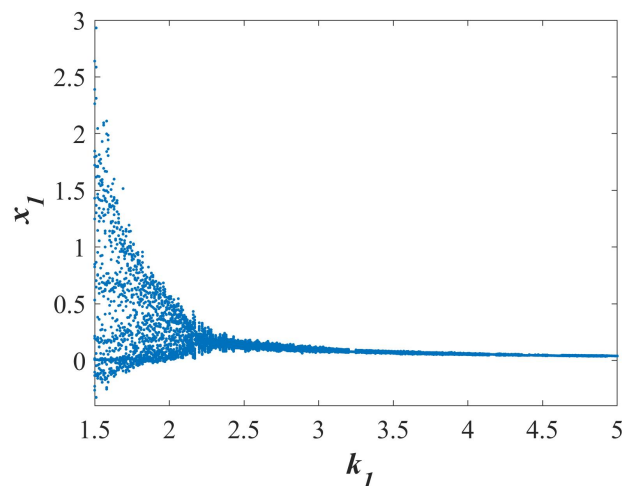


Figura 3.10: Diagrama de bifurcación del sistema conmutado con una línea de equilibrios en el intervalo de $1.5 \leq k_1 \leq 5$.

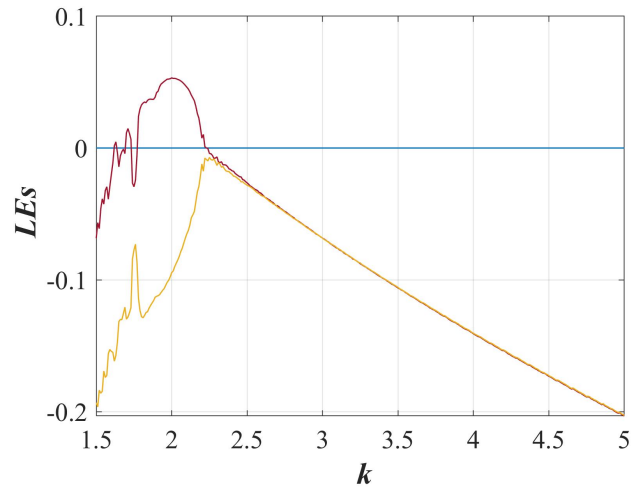


Figura 3.11: Exponentes de Lyapunov sistema conmutado con una línea de equilibrios cuando $1.5 \leq k_1 \leq 5$.

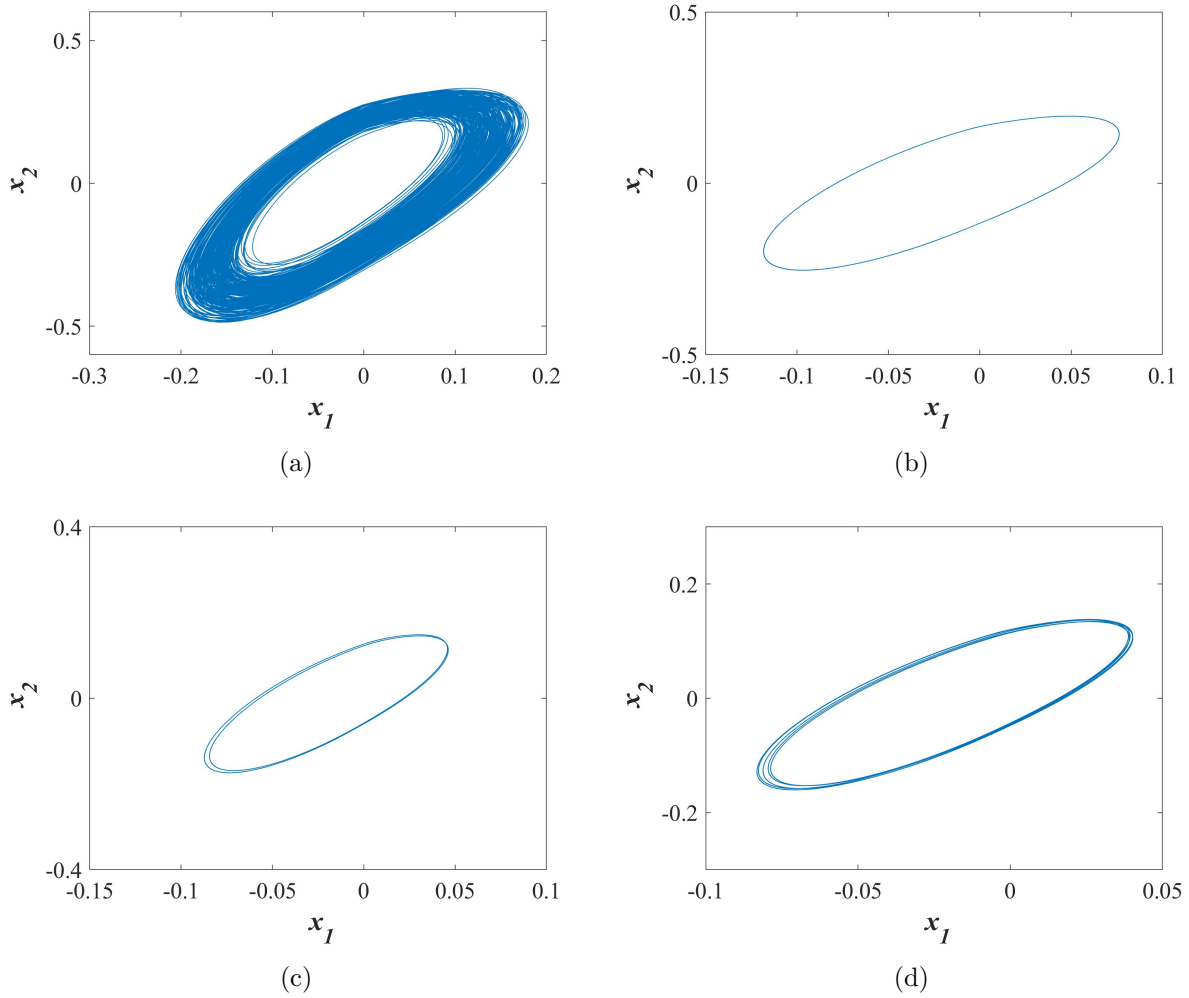


Figura 3.12: Ciclos límites del sistema conmutado con una línea de equilibrios cuando (a) $k_1 = 2.5$, (b) $k_1 = 3.24$, (c) $k_1 = 4.48$ y (d) $k_1 = 5$.

3.3 Sistema conmutado con equilibrio estable

Primero, se debe recordar que un sistema dinámico que genera un atractor con un solo punto de equilibrio estable se caracteriza por que su cuenca de atracción es gobernada por eigenvalores tipo silla-foco con partes reales negativas. El diseño de este atractor se basa en la conmutación de un sistema lineal que es gobernado por un punto de equilibrio estable y un sistema lineal sin equilibrio. Considere el siguiente sistema conmutado en tres dimensiones

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A_5\mathbf{x} + B_5, & \text{si } x_1 > 0 \\ A_6\mathbf{x} + B_6, & \text{si } x_1 \leq 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

donde el vector de las variables de estado es $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, los vectores de términos constantes son $B_5 = (0, 0, b_3)^T$ y $B_6 = (0, 0, 0)^T$. Finalmente, las matrices A_5 y A_6 se definen como

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -p & q \\ 0 & -q & k_1 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -p & q \\ -k_2 & -q & -k_1 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

donde los valores de los parámetros p y q son los mismos como en las secciones anteriores. El sistema lineal $A_5\mathbf{x} + B_5$ no tiene equilibrio si y solo si $B_5 = (0, 0, b_3)^T$, con $b_3 \neq 0$. Este sistema fue estudiado a detalle en la Sección 3.1, así como su polinomio característico $g_5(\mu)$ y sus eigenvalores asociados. Por otro lado, el sistema $A_6\mathbf{x} + B_6$, donde $B_6 = (0, 0, 0)^T$, tiene un punto de equilibrio cuando se resuelve el siguiente sistema algebraico

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ -px_2 + qx_3 = 0 \\ -k_2x_1 - qx_2 - k_1x_3 = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Por lo tanto, existe un punto de equilibrio en $E(0, 0, 0)$. Este debe ser un equilibrio estable, es decir, todos los valores propios asociados con la matriz A_6 deben tener una parte real negativa. Por lo tanto, el sistema dinámico conmutado (3.14) tiene un solo punto de equilibrio.

El análisis de los eigenvalores de la matriz A_6 se lleva a cabo a partir de la solución del polinomio característico, el cual se define como sigue

$$g_6(\lambda) = \lambda^3 + (k_1 + p)\lambda^2 + (k_1p + q^2 + k_2)\lambda + k_2(p + q). \quad (3.17)$$

Note que $g(\lambda)$ tiene un término independiente distinto de cero, es decir, el $\det(A_6) \neq 0$. La solución analítica del polinomio se puede encontrar mediante el método de *Cardano*. Tomando en cuenta el polinomio característico de (3.17), se puede expresar como una ecuación de tercer grado dada como

$$g_6(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (3.18)$$

donde $a = (k_1 + p)$, $b = (k_1p + q^2 + k_2)$ y $c = k_2(p + q)$. Ahora, se realiza un cambio de variable de la siguiente forma (transformación de *Tschirnhaus* [64])

$$\lambda = y - \frac{a}{3}, \quad (3.19)$$

lo que permite eliminar el término cuadrático cuando se sustituye en (3.18). Por lo tanto, se obtiene la ecuación cúbica reducida

$$y^3 + uy + v = 0, \quad (3.20)$$

donde

$$\begin{aligned} u &= \frac{3b - a^2}{3}, \\ v &= \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}, \\ \sigma &= \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{3}\right)^3. \end{aligned} \quad (3.21)$$

La ecuación cúbica (3.20) tiene tres raíces que se calculan como sigue:

$$\begin{aligned} y_1 &= P + Q \\ y_2 &= -\frac{1}{2}(P + Q) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(P - Q) \\ y_3 &= -\frac{1}{2}(P + Q) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(P - Q) \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde los valores P y Q se definen como

$$\begin{aligned} P &= \sqrt[3]{-\frac{v}{2} + \sqrt{\sigma}} \\ Q &= \sqrt[3]{-\frac{v}{2} - \sqrt{\sigma}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Es más fácil resolver la ecuación (3.20) dado que el término cuadrático se elimina. De modo que al obtener las raíces y_i de (3.20) entonces las raíces x_i de (3.18) se calculan como

$$\lambda_i = y_i - \frac{a}{3}. \quad (3.24)$$

Note que σ es equivalente al discriminante Δ de (3.18). Por lo tanto, la ecuación (3.18) tiene una raíz real λ_1 y dos raíces complejas conjugadas λ_2 y λ_3 si y solo si $\sigma > 0$.

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, por medio de la búsqueda sistemática

3.3. Sistema caótico con equilibrio estable

se encuentran los valores de los parámetros k_1 y k_2 con el fin de satisfacer que todos los eigenvalores de la matriz A_6 tengan parte real negativa. Lo anterior se logra cuando $k_1 = 2$ y $k_2 = 2.6$, y además el sistema conmutado (3.14) tiene comportamiento caótico con las condiciones iniciales $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (0.05, 0.05, 0.05)$.

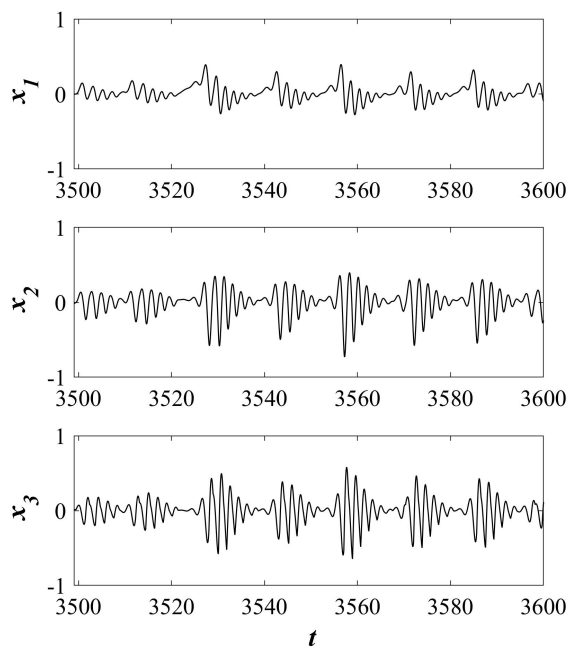
Analizando el comportamiento local del dominio \mathcal{D}_5 cuando $x_1 > 0$, se obtuvo que el determinante de $g_5(\mu)$ esta dado por $\Delta = -2235.23$ lo cual indica que los eigenvalores de A_5 son complejos, es decir, $\mu_1 = 0$ y $\mu_{2,3} = \{0.875 \pm 2.7810i\}$. Sin embargo, del dominio \mathcal{D}_6 cuando $x_1 \leq 0$, el polinomio $g_6(\lambda)$ tiene un discriminante negativo $\Delta = -4516.99$ y los eigenvalores de A_6 son $\lambda_1 = -0.7710$ y $\lambda_{1,2} = \{-0.7394 \pm 3.2268i\}$.

La disipación del sistema conmutado (3.14) se verificó por medio del gradiente del volumen $V(t)$ para cada sistema lineal, obteniendo lo siguiente:

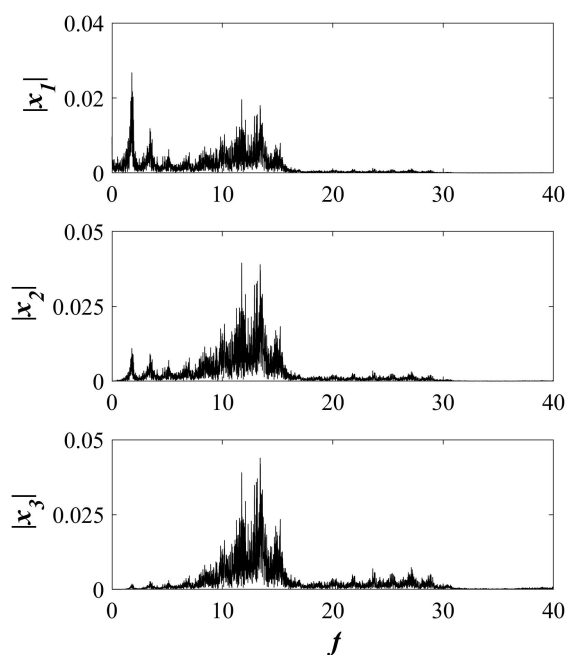
$$\nabla V(t) = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} = \begin{cases} 1.75, & \mathcal{D}_5 \\ -2.25, & \mathcal{D}_6. \end{cases} \quad (3.25)$$

A pesar de que el sistema lineal del dominio \mathcal{D}_5 no es disipativo y que el sistema lineal de \mathcal{D}_6 es disipativo, el sistema conmutado (3.14) es globalmente estable.

Las series de tiempo de los estados del sistema conmutado con equilibrio estable se pueden observar en la Figura 3.13(a), mientras que los espectros de frecuencia de las series de tiempo se muestran en las Figuras 3.13(b). El atractor oculto generado se traza en sus diferentes diagramas de espacio fase en la Figura 3.14. La presencia de caos se verifica con los exponentes de Lyapunov (Figura 3.15) dados por $\lambda_{L_1} = 0.3562$, $\lambda_{L_2} = 0$ y $\lambda_{L_3} = -0.5560$, mientras que la existencia de un atractor extraño se confirma mediante la dimensión de Kaplan-Yorke cuando $D_{KY} = 2.6548$.



(a)



(b)

Figura 3.13: (a) Series de tiempo de los estados del sistema conmutado con un solo equilibrio estable. (b) Espectros de frecuencia (Hz) de las series de tiempo.

3.3. Sistema caótico con equilibrio estable

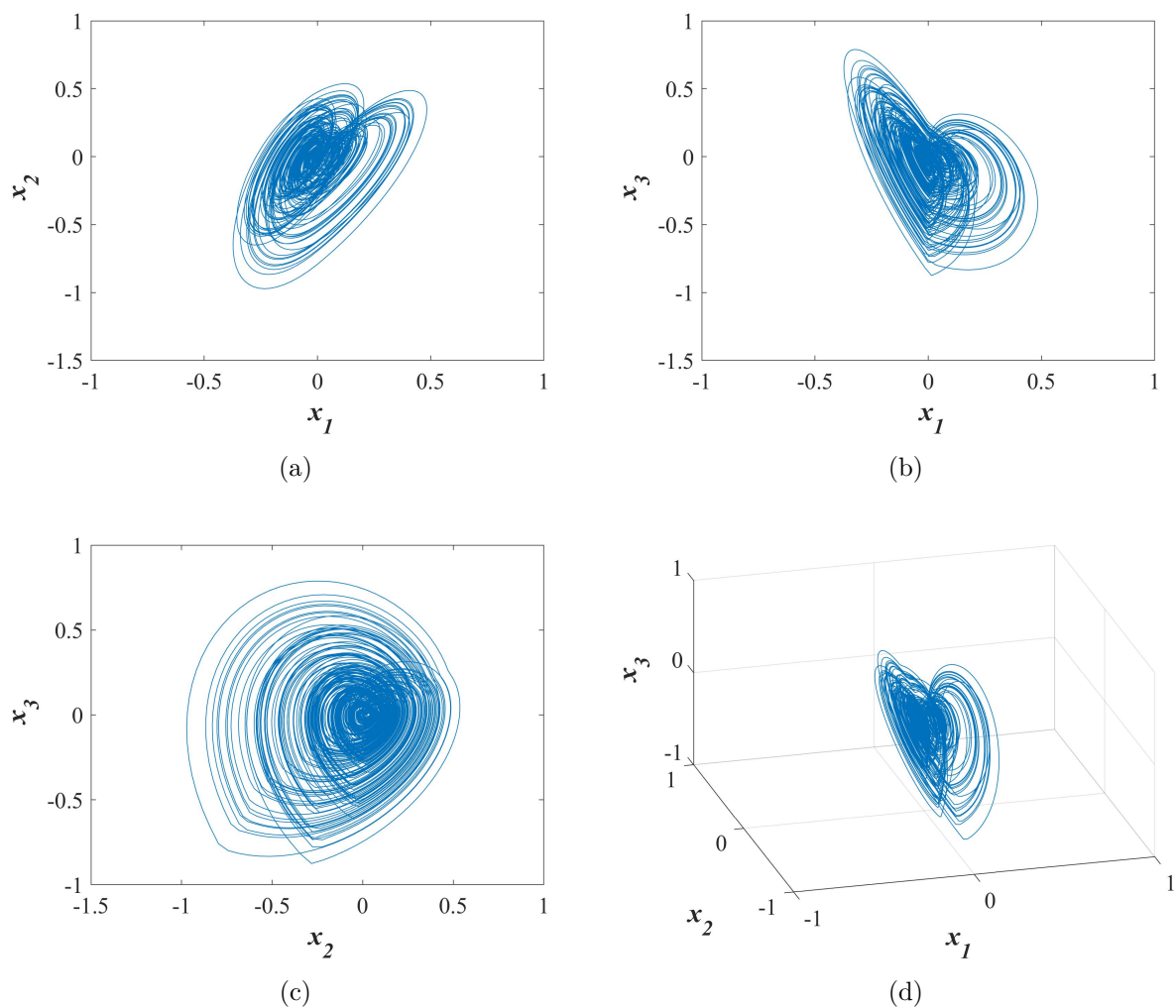


Figura 3.14: Diagramas de espacio fase del sistema conmutado con un solo equilibrio estable en el plano (a) $x_1 - x_2$, (b) $x_1 - x_3$ y (c) $x_2 - x_3$. (d) Atractor caótico en el espacio tridimensional.

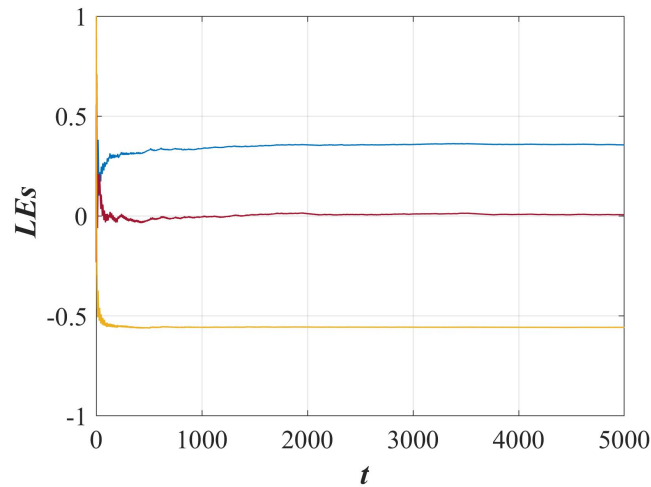


Figura 3.15: Exponentes de Lyapunov asociados al sistema conmutado con un equilibrio estable cuando $p = 0.25$, $q = 3$, $k_1 = 2$ y $k_2 = 2.6$.

Se obtuvo el diagrama de bifurcación (Figura 3.16) con respecto al parámetro k_2 cuando se varía en un intervalo de 0 a 4.5 considerando $p = 0.25$, $q = 3$ y $k_1 = 2$. En dicho diagrama no es posible observar con claridad las regiones donde existe caos, ya que las órbitas del sistema son muy densas. Con el fin de entender mejor el diagrama de bifurcación, se trazaron los exponentes de Lyapunov del sistema variando k_2 en el mismo intervalo. En la Figura 3.17 se observa que existe mayor dinámica cuando $k_2 > 2.5$, es decir, existe hasta dos exponentes de Lyapunov positivos y un negativo para la mayoría de los valores. Sin embargo, es claro verificar que para $k_2 = 2.6$ el sistema es caótico. Por último, en la Figura 3.18 se muestran algunos ejemplos de atractores ciclo límite obtenidos de diferentes valores de k_2 .

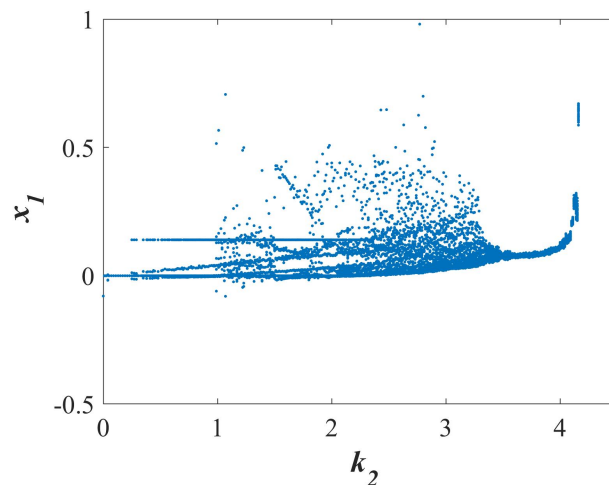


Figura 3.16: Diagrama de bifurcación del sistema caótico con equilibrio estable cuando $0 \leq k_2 \leq 4.5$.

3.3. Sistema caótico con equilibrio estable

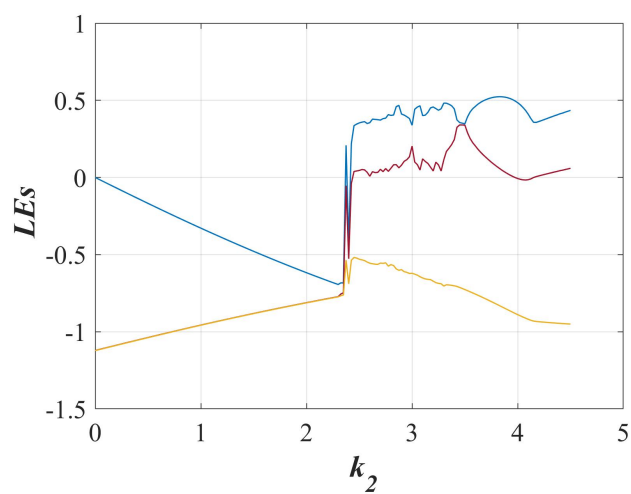


Figura 3.17: Exponentes de Lyapunov cuando $0 \leq k_2 \leq 4.5$.

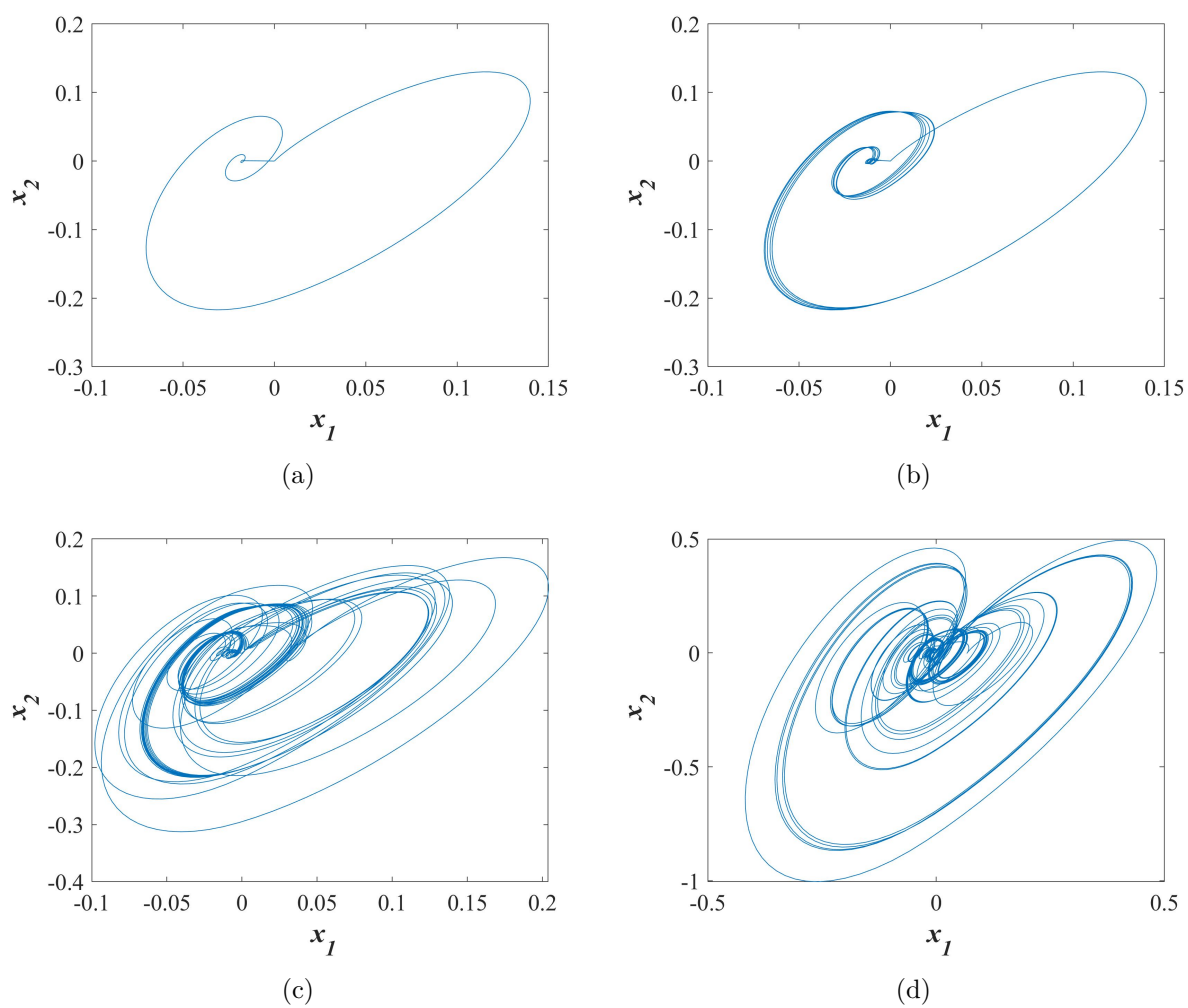


Figura 3.18: Ciclos límites del sistema conmutado con un equilibrio estable cuando (a) $k_2 = 0.1$, (b) $k_2 = 0.5$, (c) $k_2 = 1$ y (d) $k_2 = 1.5$.

3.4 Sistema multienroscado sin equilibrio

Como es bien sabido, un sistema caótico es de dinámica compleja y generalmente puede generar atractores de uno o dos scroll. Sin embargo, los atractores multienroscados tienen una mayor complejidad, lo que se convierte en un tema bastante atractivo en la actualidad. Existen numerosas publicaciones dedicadas al estudio de atractores caóticos multienroscados a partir de varios sistemas caóticos. Por esta razón, esta sección presenta la generación de atractores multienroscados a partir del sistema conmutado sin equilibrio (estudiado en la Sección 3.1).

Observe que el sistema sin equilibrio en la Ec. (3.6) se puede expresar en términos de la función signo con respecto al parámetro k , es decir, se puede expresar como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= -px_2 + qx_3 \\ \dot{x}_3 &= -qx_2 - kx_3f(x_1) + b \end{aligned} \tag{3.26}$$

donde

$$f(x_1) = \text{sgn}(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0 \\ -1, & x_1 < 0. \end{cases} \tag{3.27}$$

La función signo es una *función lineal por partes (PWL)* que representa las condiciones de conmutación de la Ec. (3.6). Entonces el sistema (3.26) es capaz de generar el atractor de la Figura 3.2.

Ahora, la función $f(x_1)$ puede ser modificada de manera que permita la conmutación de n -funciones signo desplazadas horizontalmente. Así, dicha función se expresa como

$$f(x_1) = \begin{cases} \text{sgn}(x_1 - h_n) \\ \vdots \\ \text{sgn}(x_1 - h_2) \\ \text{sgn}(x_1 - h_1) \\ \text{sgn}(x_1 - h_0) \end{cases} \tag{3.28}$$

donde h_i es el desplazamiento de la función, y n es el número de enroscados del atractor. El sistema multienroscado (3.26) conserva todas sus propiedades en los dominios \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 . En esta sección se desarrollaron atractores caóticos con dos, tres y cuatro enroscados. El parámetro de desplazamiento h se definió a partir de la magnitud y dirección de los eigenvalores. Tomando esto en cuenta, el parámetro h se encuentra ubicado por simetría entre el origen y la distancia media al eigenvector. Sin embargo, solamente es posible generar enroscados sobre el eje x , ya que para generar enroscados en diferentes ejes es necesario modificar la matriz principal del sistema para encontrar distintos eigenvectores con direcciones diferentes.

La función $f(x_1)$ del atractor de dos enroscados se da en la Ec. (3.29), mientras que la

3.4. Sistema multienroscado sin equilibrio

Figura 3.19 muestra la serie de tiempo del estado x_1 y el atractor caótico en el espacio fase sobre el plano $x_1 - x_2$. Similarmente, la función PWL para el atractor de tres enroscados esta dada en la Ec. (3.30), y la Figura 3.20 muestra la serie de tiempo del estado x_1 y el atractor caótico en el diagrama de espacio fase sobre el plano $x_1 - x_2$. Finalmente, el atractor oculto de cuatro enroscados es generado por la Ec. (3.31), y es trazado en la Figura 3.21. Se verificó que se conservara la existencia de caos en cada caso con los exponentes de Lyapunov y la dimensión de Kaplan-Yorke. Los resultados se resumen en la Tabla 3.1.

$$f(x_1) = \begin{cases} \text{sgn}(x_1 - 0.6225), & x_1 > 0.32 \\ \text{sgn}(x_1), & x_1 \leq 0.32 \end{cases} \quad (3.29)$$

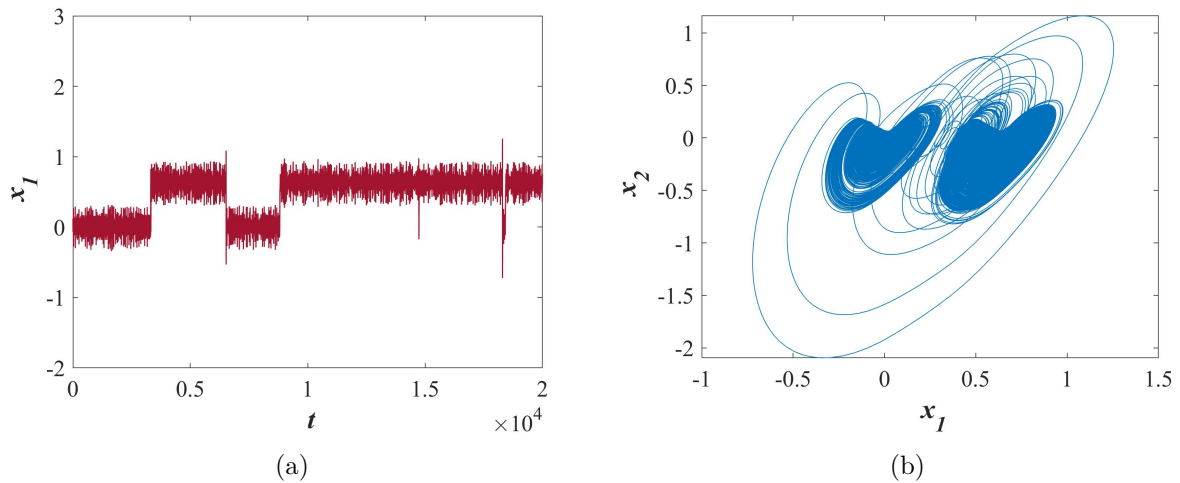


Figura 3.19: Sistema conmutado sin equilibrio de dos enroscados.

$$f(x_1) = \begin{cases} \text{sgn}(x_1 - 1.25), & x_1 > 0.95 \\ \text{sgn}(x_1 - 0.6225), & 0.32 < x_1 \leq 0.95 \\ \text{sgn}(x_1), & x_1 \leq 0.32 \end{cases} \quad (3.30)$$

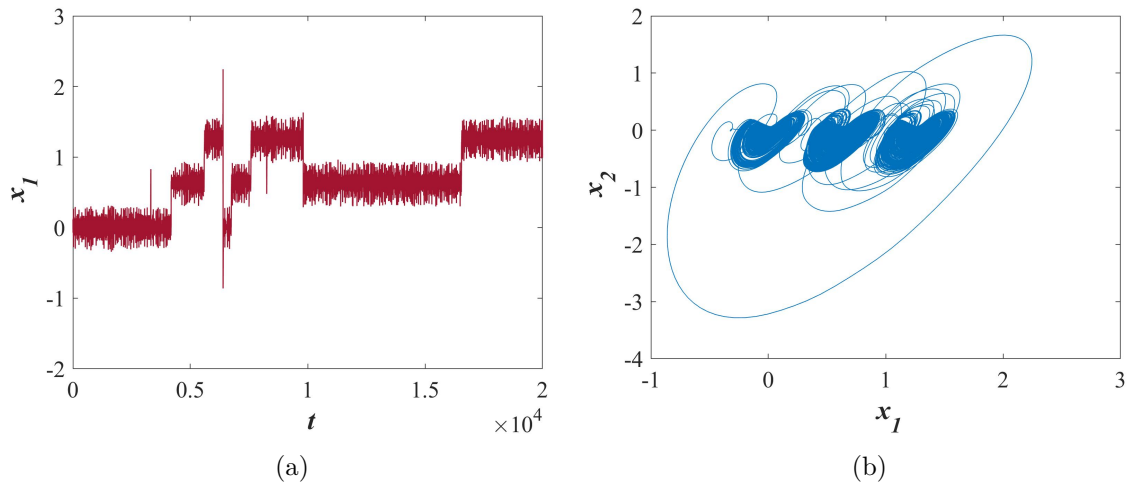


Figura 3.20: Sistema conmutado sin equilibrio de tres enroscados.

$$f(x_1) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x_1 - 1.87), & x_1 > 1.6 \\ \operatorname{sgn}(x_1 - 1.25), & 0.95 < x_1 \leq 1.6 \\ \operatorname{sgn}(x_1 - 0.6225), & 0.32 < x_1 \leq 0.95 \\ \operatorname{sgn}(x_1), & x \leq 0.32 \end{cases} \quad (3.31)$$

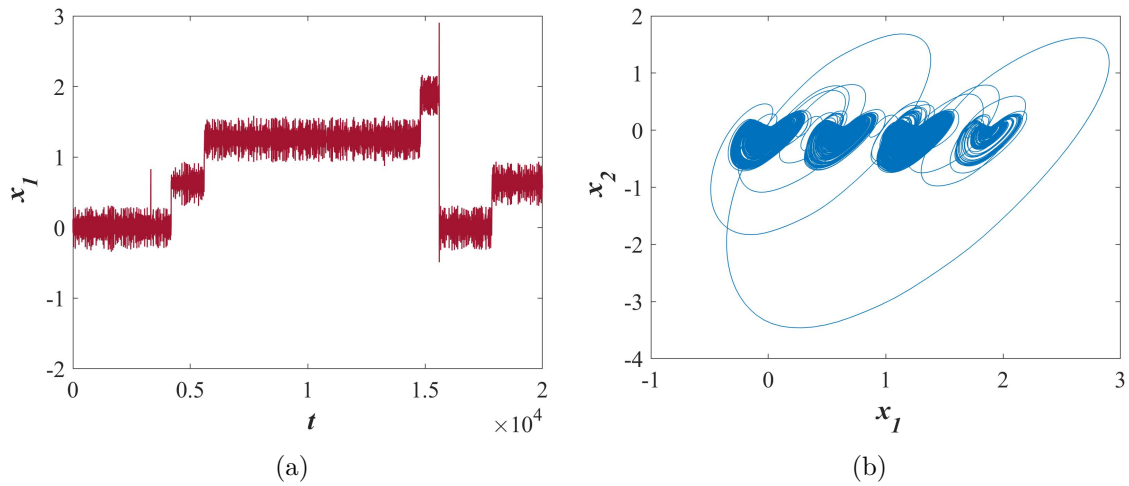


Figura 3.21: Sistema conmutado sin equilibrio de cuatro enroscados.

3.4. Sistema multienroscado sin equilibrio

Sistema	LEs	D_{KY}
	0.1086	
1	0	2.3065
	-0.3509	
	0.1190	
2	0	2.3355
	-0.3504	
	0.1235	
3	0	2.3317
	-0.3461	
	0.1235	
4	0	2.3355
	-0.3561	

Tabla 3.1: Exponentes de Lyapunov de los atractores sin equilibrio de uno, dos, tres y cuatro enroscados.

Capítulo 4

Sistemas con equilibrio variable

El sistema dinámico propuesto en esta sección constan de tres sistemas lineales; para cambiar la dirección de la trayectoria de un dominio a otro, es necesario establecer una condición dada por la función PWL. Se denomina *superficie de conmutación* a la condición impuesta por uno o más estados del sistema. Este sistema se caracteriza por tener un dominio que tiene una línea de equilibrios en un rango de valores para un parámetro específico. Sin embargo, dicho sistema no presenta equilibrio para un valor específico del mismo parámetro. Debido a que es posible cambiar la cantidad de puntos de equilibrio cambiando el valor de un parámetro, a este se le denomina *sistema con equilibrio variable*. Adicionalmente, es posible agregar un estado más al sistema conmutado con el fin de encontrar dinámica hipercaótica. De ésta manera, se propone un caso general para producir atractores hipercaóticos en n -dimensiones.

4.1 Atractor caótico en tres dimensiones

Se presenta un sistema caótico tridimensional que se define como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha y, \\ \dot{y} &= -x - \beta y + z, \\ \dot{z} &= -\gamma(x + y) + f(z),\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde $f(z)$ es una función PWL dada por

$$f(z) = \begin{cases} -bz + c, & x > 0.5, \\ az + d, & |x| \leq 0.5, \\ -bz - c, & x < -0.5. \end{cases} \quad (4.2)$$

Los parámetros correspondientes a las Ecs. (4.1) y (4.2) son: $\alpha = 10$, $\beta = 0.25$, $\gamma = 2$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$ y $-4 \leq d \leq 4$. Considere el dominio \mathcal{D}_1 cuando $x > 0.5$, el dominio \mathcal{D}_2 cuando $|x| \leq 0.5$, y si $x < 0.5$ el dominio es \mathcal{D}_3 . Además, la variación de un pequeño elemento del volumen $V(t)$ se calcula para cada sistema lineal con dominio \mathcal{D}_i como sigue

$$\nabla V(t) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = \begin{cases} -3.25, & \mathcal{D}_1, \\ 1.75, & \mathcal{D}_2, \\ -3.25, & \mathcal{D}_3. \end{cases} \quad (4.3)$$

Se puede observar que \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_3 son sistemas disipativos, mientras que \mathcal{D}_2 no lo es. Por lo tanto, el sistema (4.1) es globalmente estable y existe un atractor. Los puntos de equilibrio se obtienen del siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} 10y &= 0, \\ -x - 0.25y + z &= 0, \\ -2(x + y) + f(z) &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

De la Ec. (4.2) se observa que el sistema tiene un punto de equilibrio hiperbólico en \mathcal{D}_1 y otro en \mathcal{D}_3 dados por $E(1, 0, 1)$ y $E(-1, 0, -1)$, respectivamente. Por consiguiente, el dominio \mathcal{D}_2 tiene una línea de equilibrios dada en términos de la variable del estado x en $E(x, 0, x)$ si y solo si $d = 0$, donde $x \in \mathbb{R}$. Note que para $d \neq 0$ la región \mathcal{D}_2 no tiene equilibrio.

Es importante señalar que el sistema (4.1) es simétrico con respecto al origen cuando $d = 0$; en otras palabras, es invariante bajo la transformación $(x, y, z) \iff (-x, -y, -z)$. El Jacobiano de cada sistema lineal del sistema (4.1) se da como sigue:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ -1 & -0.25 & 1 \\ -2 & -2 & \sigma \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

donde, el parámetro σ depende del dominio. En \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_3 el parámetro $\sigma = b$ y sus eigenvalores son $\mu_1 = -3.5844$ y $\mu_{2,3} = 0.1672 \pm 3.7310i$. Por lo tanto, el punto de equilibrio asociado a estos eigenvalores es inestable y corresponde a un punto hiperbólico tipo silla-foco. Para la región \mathcal{D}_2 el parámetro $\sigma = a$ y sus eigenvalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_{2,3} = 0.875 \pm 3.2763i$. Así, \mathcal{D}_2 se rige por un foco inestable.

Existe un atractor extraño cuando d toma valores en un rango de -4 a 4 . Con el fin de obtener un atractor caótico simétrico con respecto al origen, las superficies de conmutación en

4.2. Atractor caótico en cuatro dimensiones

la ecuación (4.2) se colocan sobre el eje x en paralelo con el plano $y - z$. Estas superficies de conmutación se colocan en una distancia promedio entre el origen y los puntos de equilibrio de \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_3 , respectivamente. El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de (4.1) se resolvió numéricamente tomando las condiciones iniciales $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$. La Figura 4.1 muestra las series de tiempo de los estados x , y y z del atractor caótico de dos enroscados, cuando $d = 0.5$. Además, los diagramas de espacio fase del atractor extraño se muestran en la Figura 4.2.

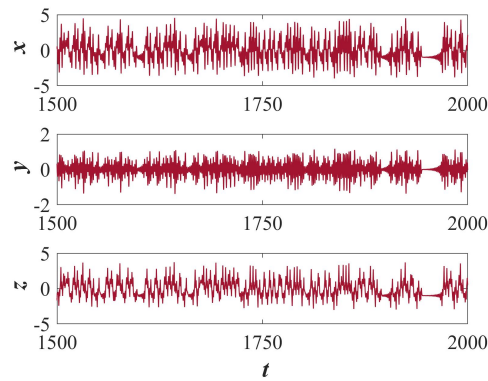


Figura 4.1: Series de tiempo de los estados x , y y z del sistema conmutado.

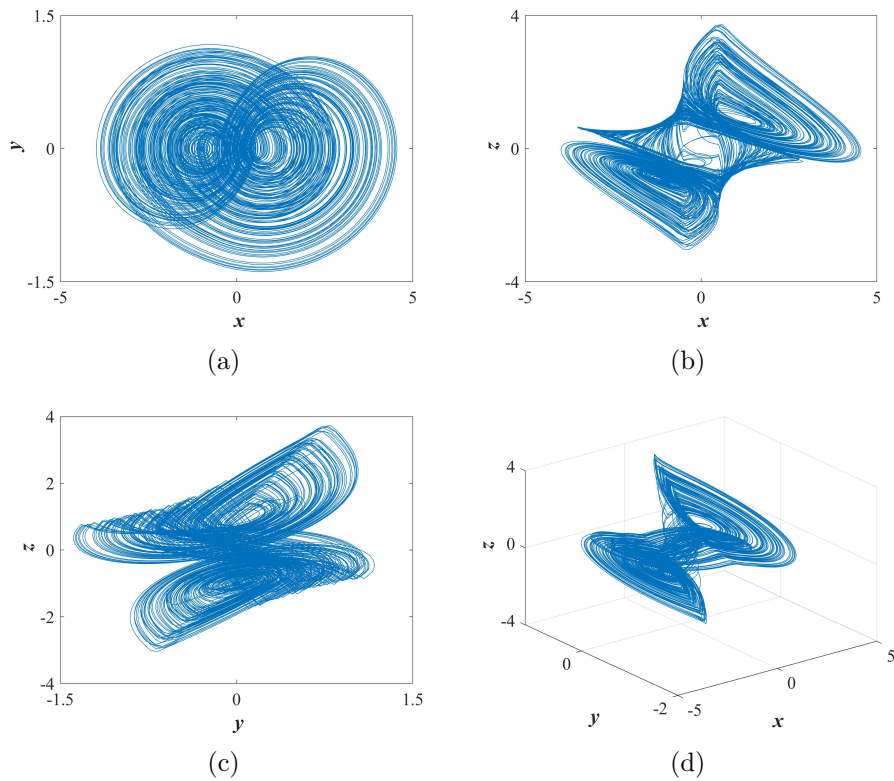


Figura 4.2: Diagramas del espacio fase del atractor de dos enroscados cuando $d = 0.5$ en el plano (a) $x - y$, (b) $x - z$ y (c) $y - z$. (d) Atractor caótico en el espacio tridimensional.

4.2 Atractor caótico en cuatro dimensiones

En esta sección se propone un atractor hipercaótico de cuatro dimensiones. Este sistema se basa en el atractor caótico tridimensional descrito anteriormente, y presenta las mismas condiciones de equilibrio variable en el dominio \mathcal{D}_2 . El sistema se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0.5z, \\ \dot{y} &= 0.5x + \alpha z, \\ \dot{z} &= -y - \beta z + w, \\ \dot{w} &= -\gamma(y + z) + f(w), \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde a partir de la función $f(w)$ se definen los dominios \mathcal{D}_i de cada sistema lineal, con $i = 1, 2, 3$. Así, la función $f(w)$ se denota como

$$f(w) = \begin{cases} -bw + c, & y > 0.5 & \rightarrow \mathcal{D}_1, \\ aw + d, & |y| \leq 0.5 & \rightarrow \mathcal{D}_2, \\ -bw - c, & y < -0.5 & \rightarrow \mathcal{D}_3. \end{cases} \quad (4.7)$$

Entonces, la disipación del sistema se obtiene por la variación de un pequeño elemento del volumen $V(t)$ para cada sistema lineal, por lo que \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_3 son disipativos, pero \mathcal{D}_2 no lo es (Ec. 4.8). A pesar de esto, el sistema no lineal (4.6) es globalmente estable y, por lo tanto, existe un atractor.

$$\nabla V(t) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} = \begin{cases} -3.25, & \mathcal{D}_1, \\ 1.75, & \mathcal{D}_2, \\ -3.25, & \mathcal{D}_3. \end{cases} \quad (4.8)$$

Por consiguiente, los puntos de equilibrio del sistema son $E(0, 1, 0, 1)$ en \mathcal{D}_1 y $E(0, -1, 0, -1)$ en \mathcal{D}_3 , mientras que \mathcal{D}_2 no tiene equilibrio cuando $d \neq 0$. Si el parámetro $d = 0$, entonces el dominio \mathcal{D}_2 tiene una línea de equilibrios denotada como $E(0, y, 0, y)$, donde $y \in \mathbb{R}$. Además, el sistema es invariante en la transformación $(x, y, z, w) \iff (-x, -y, -z, -w)$, si y solo si $d = 0$.

Según el Jacobiano de la Ec. (4.9), los eigenvalores de cada sistema lineal en (4.6) se calculan a partir del parámetro σ . Para \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_3 el parámetro $\sigma = b$ y sus eigenvalores son $\mu_1 = -3.5809$, $\mu_2 = -0.0250$ y $\mu_{3,4} = 0.1779 \pm 3.7299i$. Mientras que para \mathcal{D}_2 el parámetro $\sigma = a$ y sus eigenvalores son $\lambda_1 = -0.0216$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_{3,4} = 0.8858 \pm 3.2792i$.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & -0.25 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \sigma \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

4.2. Atractor caótico en cuatro dimensiones

Las series de tiempo del sistema (4.6) cuando $d = 0.5$ con condiciones iniciales $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$ se observan en la Figura 4.3. Por consiguiente, algunos ejemplos del atractor caótico en un espacio tridimensional se muestran en Figura 4.4.

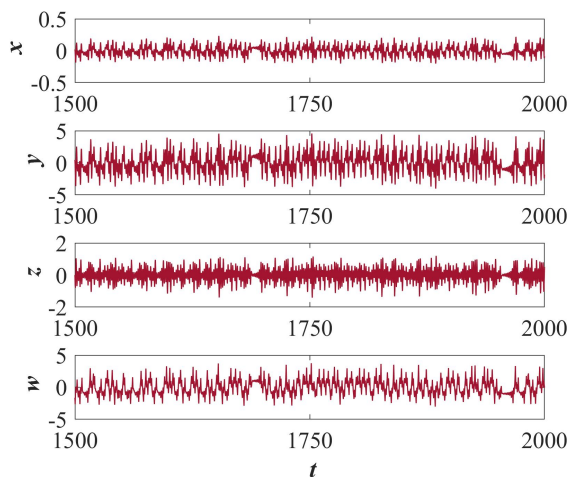


Figura 4.3: Series de tiempo de los estados x, y, z y w del sistema conmutado.

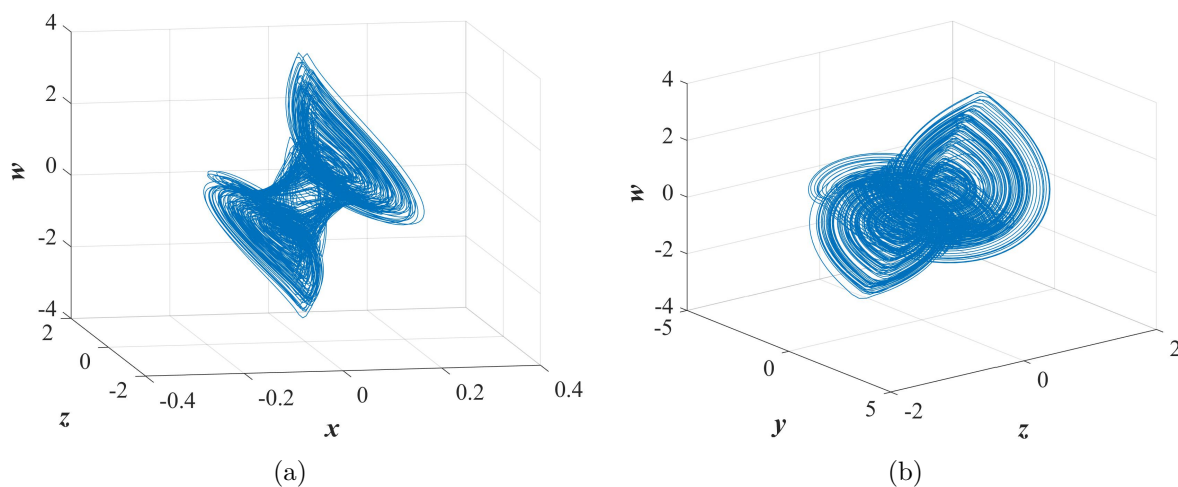


Figura 4.4: Atractor caótico en el espacio tridimensional (a) xzw y (b) yzw .

4.3 Atractor caótico en cinco dimensiones

Teniendo en cuenta el sistema conmutado de cuatro dimensiones y agregando otro estado, se obtiene un sistema conmutado de cinco dimensiones con el mismo comportamiento de equilibrio en el dominio \mathcal{D}_2 . El sistema se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z + u, \\ \dot{y} &= x + 0.5w, \\ \dot{z} &= 0.5y + \alpha w, \\ \dot{w} &= -z - \beta w + u, \\ \dot{u} &= -\gamma(z + w) + f(u). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ahora, la función PWL está determinada en términos del estado u y la superficie de conmutación se define en términos del estado z , por lo tanto $f(u)$ es

$$f(u) = \begin{cases} -bu + c, & z > 0.5 \quad \rightarrow \mathcal{D}_1, \\ au + d, & |z| \leq 0.5 \quad \rightarrow \mathcal{D}_2, \\ -bu - c, & z < -0.5 \quad \rightarrow \mathcal{D}_3. \end{cases} \quad (4.11)$$

De manera similar, \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_3 son disipativos, excepto \mathcal{D}_2 (según la Ec. 4.11). Sin embargo, el sistema conmutado (4.10) es globalmente estable. Ahora, el sistema tienen dos puntos de equilibrio $E(0, 0, 1, 0, 1)$ y $E(0, 0, -1, 0, -1)$ en \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_3 , respectivamente. No obstante, \mathcal{D}_2 no presenta equilibrio cuando $d \neq 0$, pero dicho dominio tiene una línea de equilibrios cuando $d = 0$ dada por $E(0, 0, z, 0, z)$ donde $z \in \mathbb{R}$.

$$\nabla V(t) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} = \begin{cases} -3.25, & \mathcal{D}_1, \\ 1.75, & \mathcal{D}_2, \\ -3.75, & \mathcal{D}_3. \end{cases} \quad (4.12)$$

De acuerdo con la matriz Jacobiana para cada dominio (Ec. (4.13)), los eigenvalores del sistema son los siguientes: para \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_3 son $\mu_{1,2} = 0.2020 \pm 3.7264i$, $\mu_3 = -3.5750$, $\mu_{4,5} = -0.0394 \pm 1.0075i$ y $\mu_5 = 0$; mientras que para \mathcal{D}_2 están dados por $\lambda_{1,2} = 0.9102 \pm 3.2863i$, $\lambda_{3,4} = -0.0352 \pm 0.9992i$ y $\lambda_5 = 0$. Las series de tiempo de los estados del sistema se muestran en la Figura 4.5, cuando $d = 0.5$. Además, en la Figura 4.6 se muestran ejemplos de los espacio fase tridimensionales. Este atractor hipercaótico se traza utilizando las condiciones iniciales $(x_0, y_0, z_0, w_0, u_0) = (0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0.25 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & \sigma \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

4.4. Atractor caótico en n -dimensiones

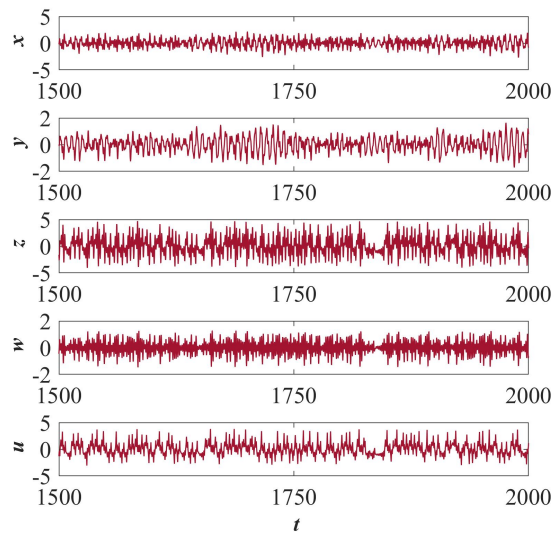


Figura 4.5: Series de tiempo de los estados x , y , z , w y u del sistema conmutado.

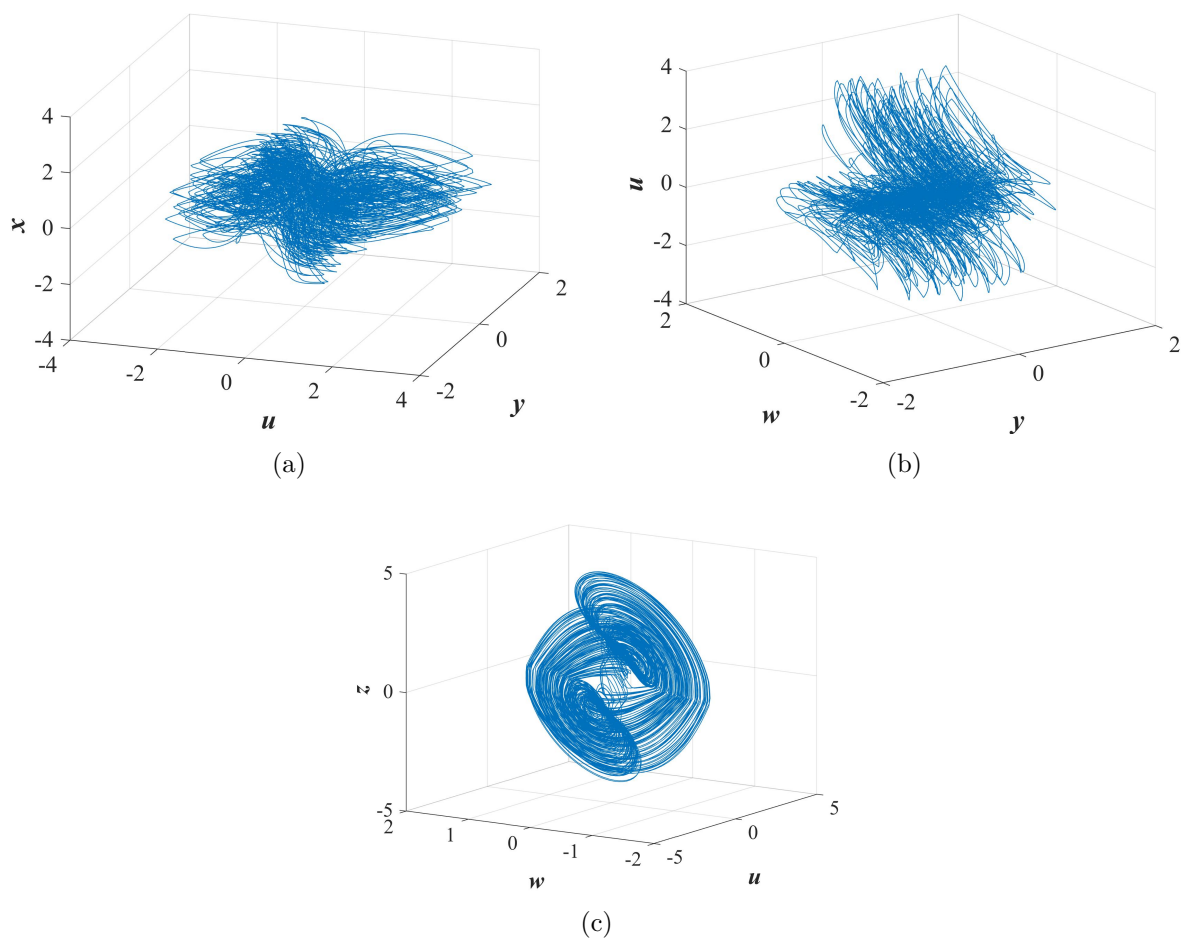


Figura 4.6: Atractor caótico en el espacio tridimensional (a) xzu , (b) ywu y (c) zwu .

4.4 Atractor caótico en n -dimensiones

Para obtener un sistema hipercaótico de n -dimensiones que genere un atractor de dos enrollados con tres dominios, y conservando las mismas características de equilibrio (como los sistemas anteriores), considere el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + f(x_n). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Así, la función PWL $f(x_n)$ está definida por

$$f(x_n) = \begin{cases} a_{nn_1}x_n + k_1, & x_{n-2} > h & \longrightarrow \mathcal{D}_1, \\ a_{nn_2}x_n + k_2, & |x_{n-2}| \leq h & \longrightarrow \mathcal{D}_2, \\ a_{nn_3}x_n + k_3, & x_{n-2} < -h & \longrightarrow \mathcal{D}_3, \end{cases} \tag{4.15}$$

donde k_1, k_2 y $k_3 \in \mathbb{R}$ son los términos independientes, mientras que las superficies de conmutación son representadas por h . Observe que el sistema mantiene tres sistemas lineales debido a la función $f(x_n)$. El equilibrio de cada sistema lineal se da como la solución del conjunto de ecuaciones algebraicas cuando $\dot{x}_i = 0$.

Note que esto nos lleva directamente a las tres declaraciones del teorema de Rouché-Frobenius estudiados en el Capítulo 3. En otras palabras, los dominios \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_3 tienen un punto de equilibrio hiperbólico. Por otro lado, \mathcal{D}_2 no tiene equilibrio cuando $k_2 \neq 0$, sin embargo, existen múltiples puntos de equilibrio cuando $k_2 = 0$.

4.5 Análisis de rendimiento

Con el fin de verificar la existencia de comportamiento caótico e hipercaótico en los atractores presentados anteriormente, se analiza la dinámica de los sistemas en esta sección. Como se mencionó anteriormente, los exponentes de Lyapunov son la medida de la tasa exponencial de la divergencia y convergencia entre trayectorias infinitesimalmente cercanas. Sin embargo, un sistema hipercaótico se caracteriza por tener más de un exponente de Lyapunov positivo [65]. Esto significa que la dinámica del sistema se expande en más de una dirección al mismo tiempo. Por lo tanto, la dinámica del sistema es más compleja que cuando solo existe un exponente de Lyapunov positivo. En la Tabla 4.1 se observa que cada sistema tiene dos exponentes de Lyapunov positivos, pero con casi la misma magnitud. A partir de estos exponentes, la dimensión de Kaplan-Yorke se calculó para cada sistema. Además, se ha obtenido el espectro de los exponentes de Lyapunov para cada sistema cuando varía el parámetro d (Figure 4.7).

4.5. Análisis de rendimiento

Sistema	Exponentes de Lyapunov	Dimension de Lyapunov
3D	$\lambda_{LE_1} = 0.4463$ $\lambda_{LE_2} = 0.3211$ $\lambda_{LE_3} = -2.7469$	2.3882
4D	$\lambda_{LE_1} = 0.1777$ $\lambda_{LE_2} = 0.1782$ $\lambda_{LE_3} = 0$ $\lambda_{LE_4} = -3.5786$	2.1104
5D	$\lambda_{LE_1} = 0.6449$ $\lambda_{LE_2} = 0.6360$ $\lambda_{LE_3} = 0$ $\lambda_{LE_4} = 0$ $\lambda_{LE_5} = -3.2256$	2.6587

Tabla 4.1: Exponentes de Lyapunov de los sistemas conmutados cuando $d = 0.5$

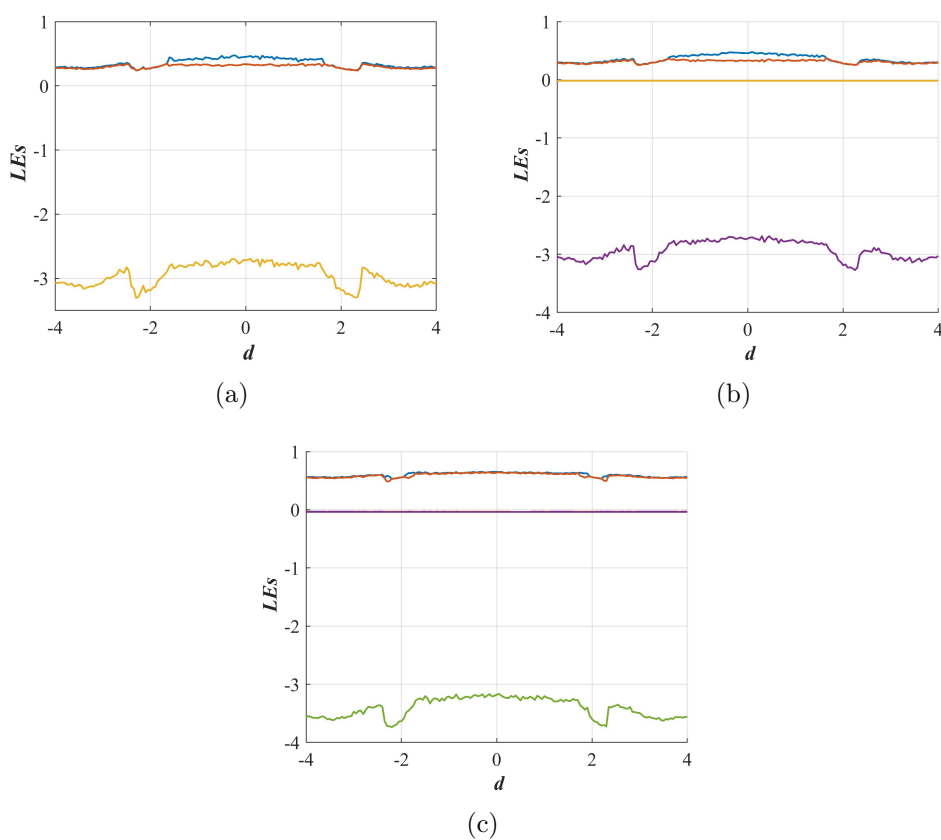


Figura 4.7: Espectro de los exponentes de Lyapunov de los atractores hipercaóticos cuando d varía de -4 a 4 : (a) tres dimensiones, (b) cuatro dimensiones y (c) cinco dimensiones.

Se realizó un mapa de Poincaré para cada uno de los atractores hipercaóticos sobre un plano. Los puntos trazados en una sección transversal al flujo del sistema se distribuyen erráticamente, ésto indica la existencia del caos. Los comportamientos de los atractores hipercaóticos anteriores se muestran en la Figura 4.8.

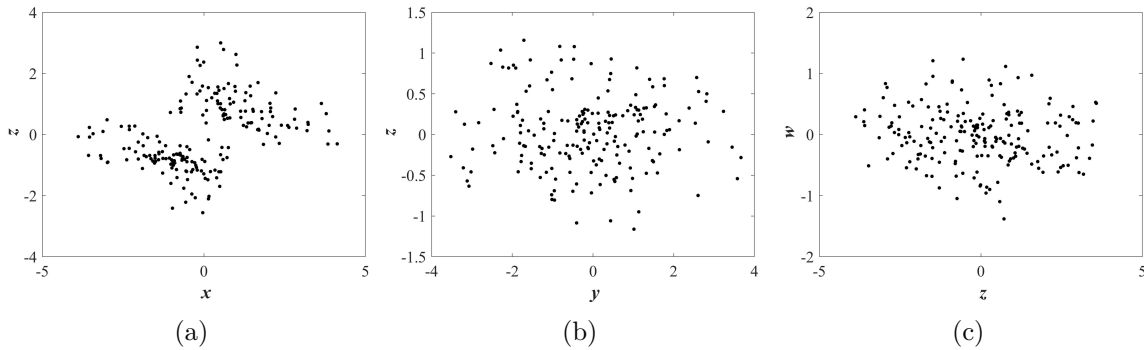


Figura 4.8: Mapas de Poincaré de los atractores hipercaóticos en (a) tres dimensiones, (b) cuatro dimensiones y (c) cinco dimensiones.

Además, los diagramas de bifurcación de los tres atractores anteriores se realizaron con respecto al parámetro d (Figura 4.9). En estos diagramas se observa que existen comportamientos cuasi periódicos en el intervalo de -2.3 a -1.7 y en el intervalo de 1.7 a 2.3 . Tomando estos intervalos y utilizando el sistema tridimensional como ejemplo, los diagramas del espacio fase con sus respectivas series de tiempo se trazaron en la Figura 4.10 cuando $d = 2$. Las series de tiempo de los estados muestran que después de un pequeño período de transición, el sistema tiende a tener comportamientos cuasi periódicos.

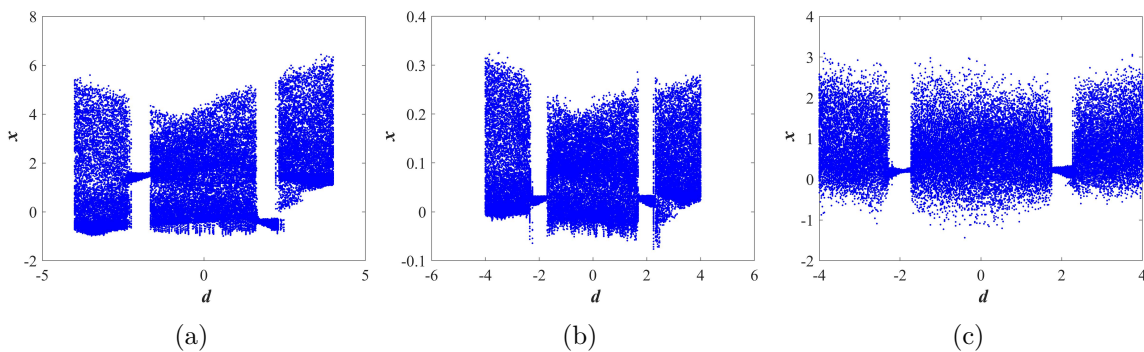


Figura 4.9: Diagramas de bifurcación de los atractores cuando d varía de -4 a 4 : (a) tres dimensiones, (b) cuatro dimensiones y (c) cinco dimensiones.

4.5. Análisis de rendimiento

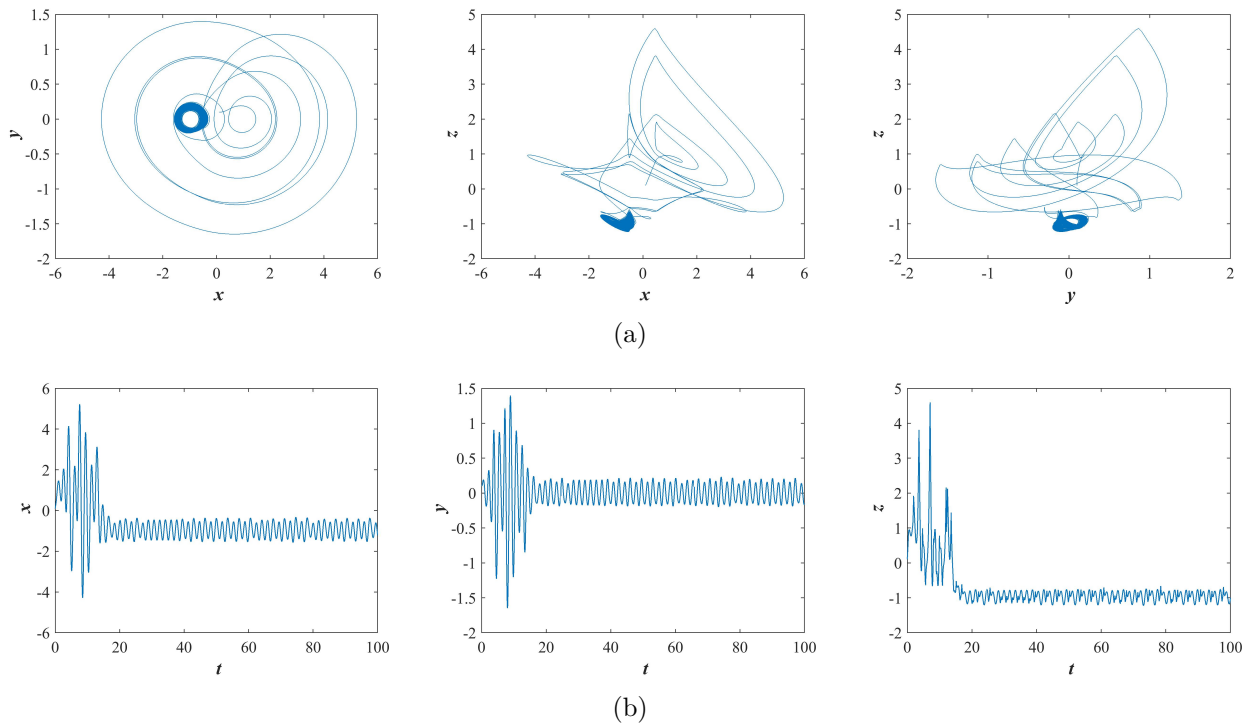


Figura 4.10: Comportamiento cuasi-periódico del sistema caótico tridimensional cuando $d = 2$: (a) diagramas del espacio fase y (b) series de tiempo.

Por otro lado, la medida de la complejidad de las series de tiempo de los sistemas conmutados anteriores se calculó mediante el método de entropía por permutación (PE) [66]. El método PE considera una serie de tiempo $\{X(i) : i = 1, 2, \dots, M\}$ y estudia todas las posibles $m!$ permutaciones (π) de orden m . Para cada permutación π se determina la frecuencia relativa ($\#$). Por lo tanto, la permutación π se determina como

$$p(\pi) = \frac{\# \{i | i \leq T - m + 1, \text{ de tipo } \pi\}}{T - m + 1}. \quad (4.16)$$

Por lo tanto, según la definición de entropía de Shannon [67], PE se denota como:

$$PE(x, m) = - \sum_{j=1}^{m!} \frac{p_j(\pi) \ln(p_j(\pi))}{\ln(m!)}, \quad (4.17)$$

donde el rango de m es $\{2, 3, \dots, 7\}$. De acuerdo con la referencia [68], el método de PE para sistemas hipercaóticos considera que la condición mínima para la longitud M de la serie de tiempo debe ser $M > 5m!$. Además, los valores recomendados para elegir el orden m de la permutación π deben ser $m > 3$.

El método de PE se realizó tomando las series de tiempo de los estados z , w y u de los sistemas hipercaóticos de tres, cuatro y cinco dimensiones, respectivamente. Teniendo en cuenta lo anterior, la cantidad de datos utilizados de cada estado fue $M = 5000$, el orden de las permutaciones π fue $m = 5$ y el tiempo de retraso fue de $T = 5$. La Figura 4.11 muestra

la complejidad de cada una de las series temporales cuando el parámetro d varía de -4 a 4 : la línea azul es respecto al estado z del atractor 3–dimensiones, la línea roja es respecto al estado w del atractor en 4–dimensiones y la línea amarilla es respecto al estado u del atractor en 5–dimensiones. Se observa que estas series de tiempo son complejas y similares pero menos complejas en el rango donde existe un comportamiento cuasi periódico. Esto significa que no hay un comportamiento caótico.

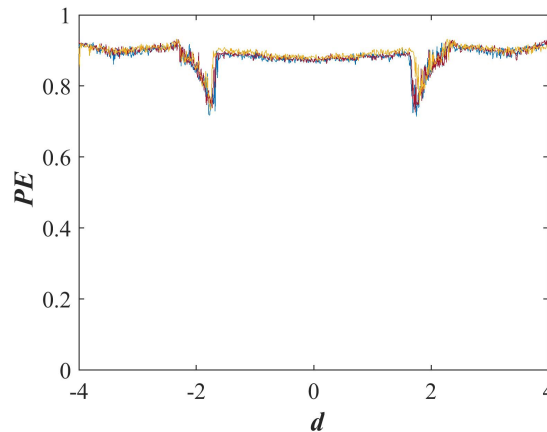


Figura 4.11: Resultados de la complejidad de las series de tiempo cuando el parámetro d varía, la complejidad: la línea azul es respecto al estado z del atractor en 3D; la línea roja respecto al estado de w del atractor en 4D y la línea amarilla es respecto al estado u del atractor en 5D.

4.6 Implementación del circuito

En esta sección, se presenta la implementación del circuito electrónico correspondiente al atractor caótico tridimensional propuesto anteriormente dado por las ecuaciones (4.1) y (4.2). Este circuito se implementó utilizando configuraciones básicas de amplificadores operacionales. El diseño de este circuito se divide en dos partes: primeramente, el circuito principal para la Ec. (4.1); y después, otro circuito correspondiente a la función PWL de la Ec. (4.2). El circuito derivado de la Ec. (4.1) se muestra en la Figura 4.12. Usando las leyes de Kirchhoff, las ecuaciones del circuito están dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{R_1 C_1} y, \\ \dot{y} &= -\frac{1}{R_2 C_2} x - \frac{1}{R_2 C_2} y + \frac{1}{R_2 C_2} z, \\ \dot{z} &= -\frac{1}{R_3 C_3} x - \frac{1}{R_3 C_3} y + \frac{1}{R_3 C_3} z - \frac{1}{R_3 C_3} g(z), \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde $g(z) = -f(z)$ que representa la función PWL. Observe que los voltajes en los capacitores C_1 , C_2 y C_3 representan las variables de estado x , y y z , respectivamente. La función PWL $g(z)$ se implementó a través de comparadores operacionales como se muestra en la Figura 4.13. Los voltajes de alimentación de $5V$ y $-5V$ corresponden a los valores del parámetro c de la Ec. (4.2). Por otro lado, las superficies de conmutación se representan como

4.6. Implementación del circuito

fuentes voltaje de 0.5V y $-0.5V$. Por lo tanto, la tensión de salida de $g(z)$ está determinada por

$$g(z) = \begin{cases} -\frac{R}{R_3}z + 5V, & x > 0.5V, \\ -d, & |x| < 0.5, \\ \frac{R}{R_3}z + 5V, & x < -0.5V. \end{cases} \quad (4.19)$$

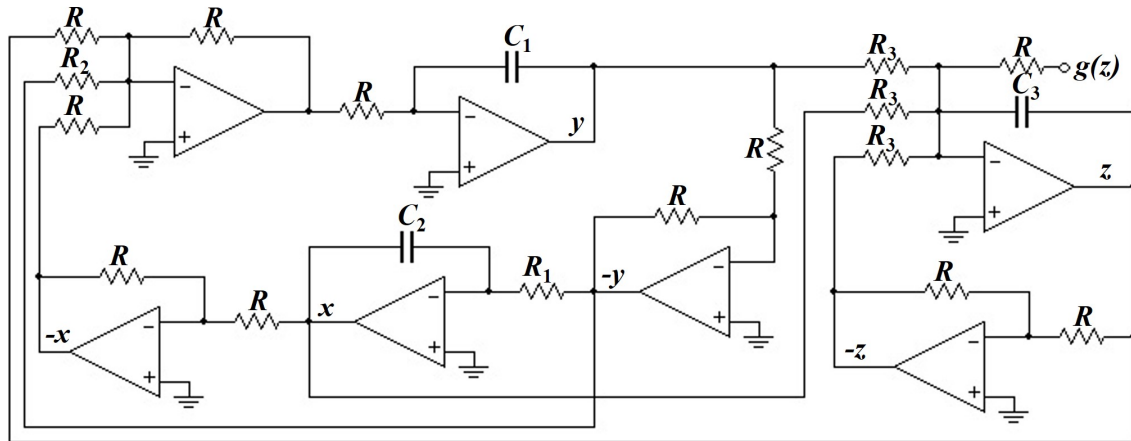


Figura 4.12: Circuito principal del sistema caótico tridimensional.

Los circuitos integrados usados en los circuitos electrónicos anteriores fueron amplificadores operacionales TL082 y los comparadores LM311. Además, los valores de los elementos pasivos utilizados se establecieron de la siguiente manera: $R = 10k\ \Omega$, $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 40k\Omega$, $R_3 = 5k\Omega$, $R_4 = 2k\Omega$ y $C_1 = C_2 = C_3 = 10\mu F$. Es importante mencionar que debido a los valores de magnitud de los elementos pasivos, el sistema de la Ec. (4.18) tiene un factor de escala igual a 10^3 , pero esto no afecta la dinámica del sistema.

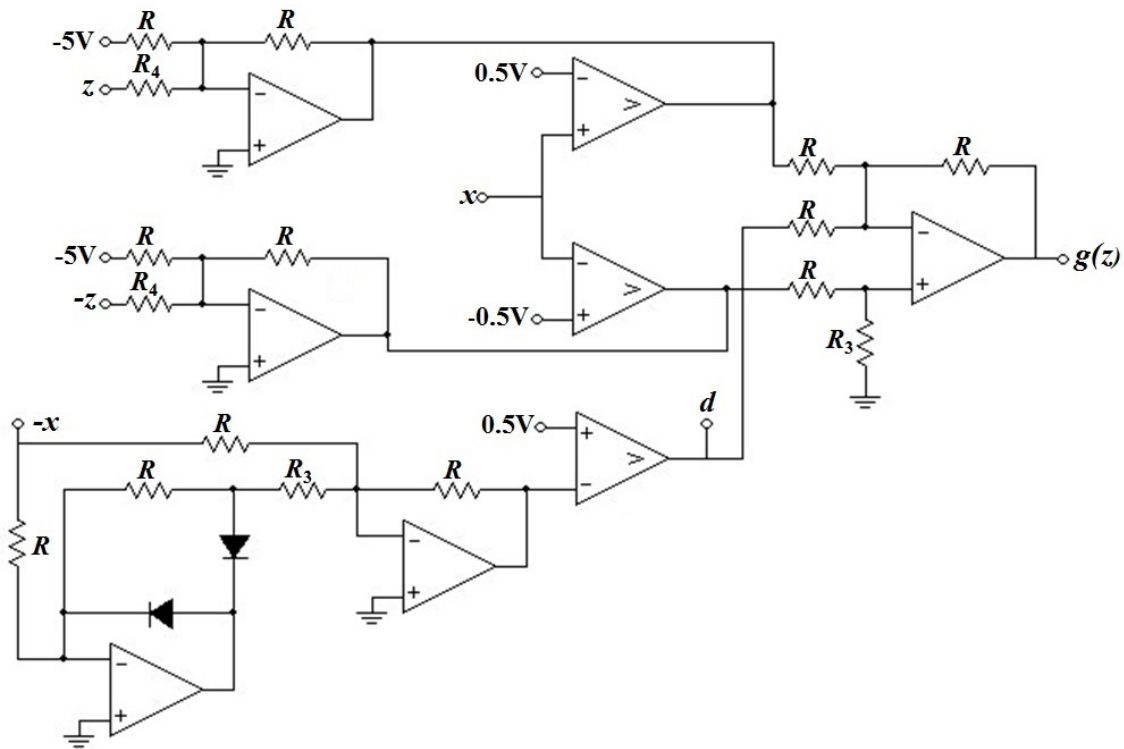


Figura 4.13: Diagrama del circuito de la función $g(z)$.

Para alimentar los circuitos, se utilizó una fuente de alimentación de 12V tipo BK Precision 1760A. Las señales del circuito se obtuvieron utilizando un osciloscopio analógico tipo BK Precision 2190B con un ancho de banda de 100MHz. Los diagramas del espacio fase del atractor caótico obtenido de los circuitos anteriores se muestran en la Figura 4.14. Los diagramas del espacio fase del plano $x - y$ como del plano $x - z$ tienen una escala de 500mV/div en el eje horizontal y 200mV/div en el eje vertical. En ambas figuras, es posible ver claramente las superficies de conmutación sobre el eje horizontal como dos líneas verticales. Estas líneas están ubicadas cerca de 0.5V y $-0.5V$, respectivamente. Por otro lado, la escala del plano $y - z$ es 200mV/div en el eje y y 200mV/div en el eje z . El atractor caótico obtenido de los circuitos anteriores corresponde a los de la simulación numérica (Figura 4.2).

4.6. Implementación del circuito

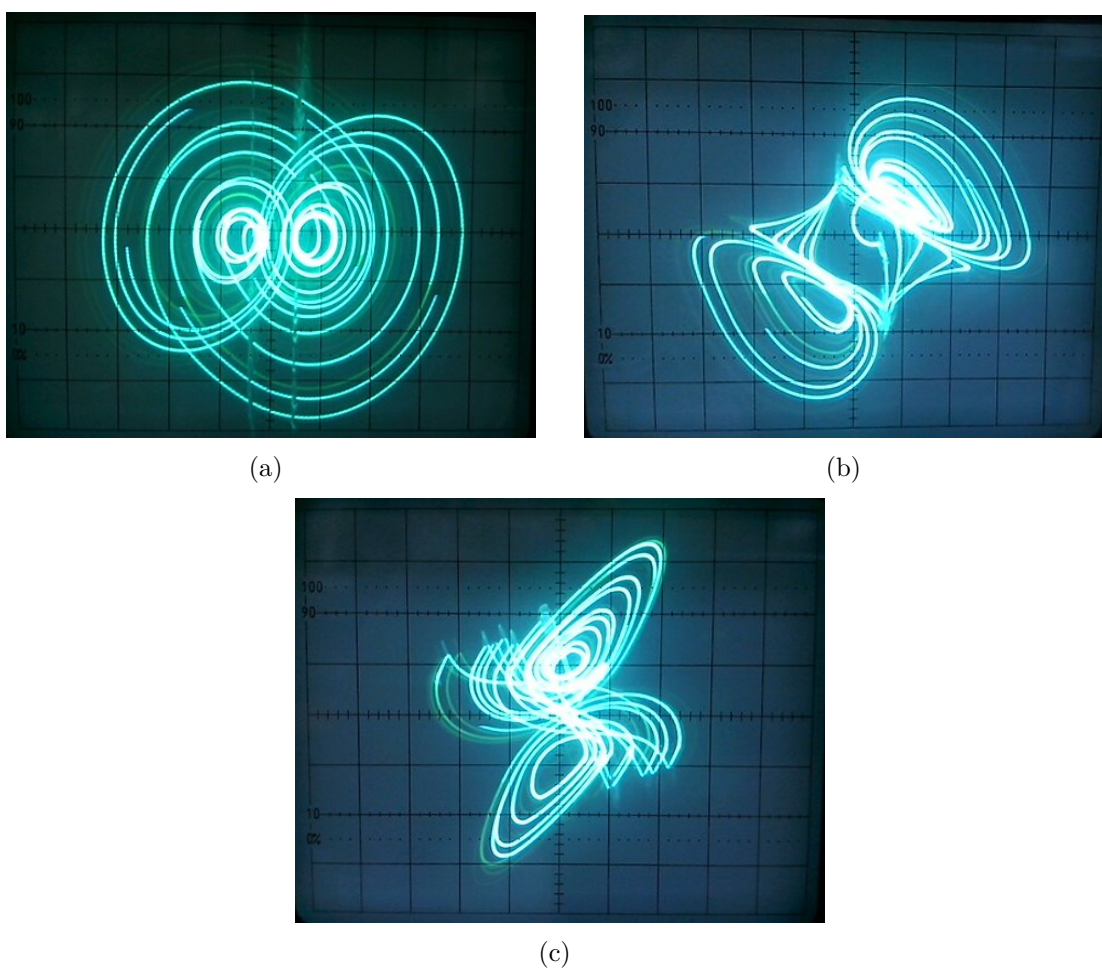


Figura 4.14: Respuesta del circuito electrónico en el plano (a) $x - y$, (b) $x - z$ y (c) $y - z$.

Como se mencionó en el capítulo anterior, el diseño de sistemas caóticos multienroscados es atractivo ya que tienen mayor complejidad en su comportamiento. Por esta razón, se genera atractores caóticos multienroscados a partir del sistema caótico tridimensional descrito en la Ec. 4.1 por medio de funciones PWL. Estos atractores se caracterizan por generar enroscados en dirección del eje x y el eje y , en otra palabras, es posible generar una red de $N \times M$ atractores sobre el plano xy .

Considere el siguiente sistema caótico tridimensional:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - f(y)) \\ \dot{y} &= -(x - f(x)) - 0.25(y - f(y)) + z \\ \dot{z} &= -2(x - f(x)) - 2(y - f(y)) + f(z) \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde la función $f(z)$ está dada como

$$f(z) = \begin{cases} -3z + 2.25, & x - f(x) \geq 0.225 \\ 2z, & |x - f(x)| < 0.225 \\ -3z - 2.25, & x - f(x) \leq -0.225 \end{cases} \quad (4.21)$$

Comparando el sistema original (Ec. 4.1) con el sistema anterior, note que las variables de los estados x y y son reemplazados por un desplazamiento dado por $(x - f(x))$ y $(y - f(y))$, respectivamente. La función $f(x)$ es la responsable de generar N -enroscados sobre el eje x para $N \geq 2$. La función $f(x)$ se describe como

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N_1} A[1 + \text{sgn}(x - i)] - \sum_{j=1}^{N_2} A[1 - \text{sgn}(x + j)] \quad (4.22)$$

$$N_1 = \begin{cases} \frac{N}{2} - 1, & N \text{ es par} \\ \frac{N-1}{2}, & N \text{ es impar} \end{cases} \quad \text{y} \quad N_2 = \begin{cases} N_1, & N \text{ es par} \\ N_1 - 1, & N \text{ es impar.} \end{cases} \quad (4.23)$$

Por otro lado, función $f(y)$ genera enroscados sobre el eje y , es decir, $f(y)$ genera M -líneas verticales de atractores de N -enroscados, para $M \geq 1$. Ésta función se denota de la siguiente forma:

$$f(y) = \sum_{i=1}^{M_1} A[1 + \text{sgn}(y - (0.5 + i - 1))] - \sum_{j=1}^{M_2} A[1 - \text{sgn}(y - (0.5 + j - 1))] \quad (4.24)$$

$$M_1 = \begin{cases} \frac{M}{2}, & M \text{ es par} \\ \frac{M-1}{2}, & M \text{ es impar} \end{cases} \quad \text{y} \quad M_2 = \begin{cases} M_1 - 1, & M \text{ es par} \\ M_1, & M \text{ es impar.} \end{cases} \quad (4.25)$$

4.6. Sistema caótico PWL multienroscado

Note que las funciones $f(x)$ y $f(y)$ se rigen por el parámetro A que representa la amplitud del atractor, además, los parámetros N y M pueden ser valores pares o impares siempre y cuando se respete las condiciones dadas por las Ecs. 4.23 y 4.25. La Figura 4.15 muestra los diagramas del espacio fase de atractores multienroscados de 2×5 enroscados, 4×3 enroscados y 6×5 enroscados.

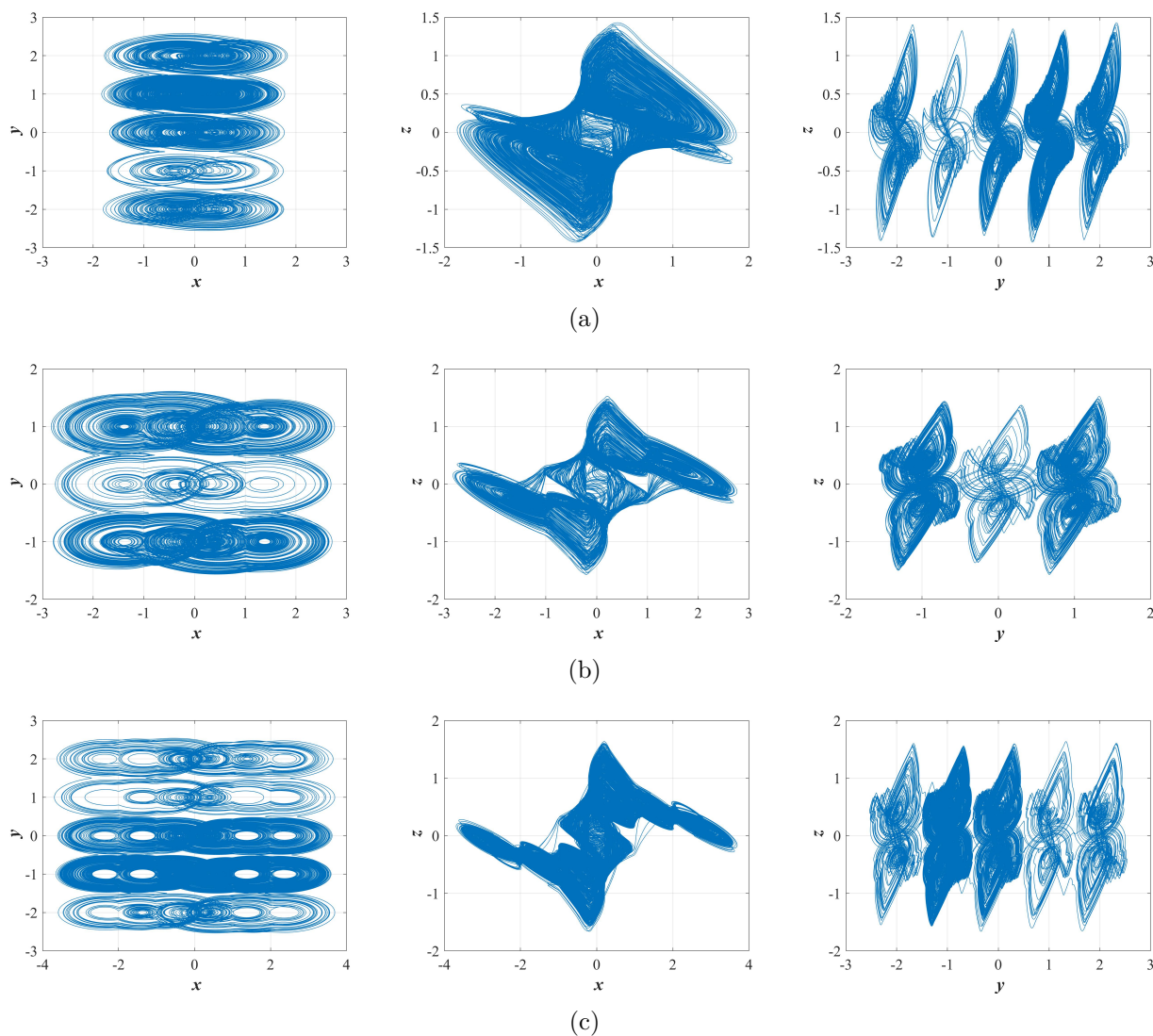


Figura 4.15: Sistema caótico PWL con una línea de equilibrios localmente de (a) 2×5 enroscados, (b) 4×3 enroscados y (c) 6×5 enroscados.

Capítulo 5

Conclusiones

En este proyecto de tesis se llevo a cabo el estudio de los sistemas caóticos que generan atractores ocultos mediante la conmutación de sistema lineales, dando como alcanzado el objetivo de este trabajo. A pesar de que el estudio de los sistemas caóticos se ha llevado a cabo a lo largo de muchos años, los atractores caóticos ocultos es una línea de investigación reciente. Encontrar atractores ocultos no es una tarea fácil debido a que sus cuencas de atracción no intersecan con las vecindades de un punto de equilibrio hiperbólico. Además, dichas cuencas son muy pequeñas y algunas veces la dimensión del atractor es mucho menor que la dimensión del sistema considerado. Por ésta razón, no es posible aplicar el teorema Shilnikov y encontrar órbitas homoclínicas y heteroclínicas.

Existe una fuerte relación entre la solución de un sistema lineal algebraico y el equilibrio de un sistema lineal dinámico, ambos estrechamente relacionados por el teorema de Rouché-Frobenious. Ésto se considera una gran ventaja cuando se desea diseñar sistemas con un equilibrio estable, con infinitos puntos de equilibrio o sin equilibrio.

Es difícil encontrar comportamiento caótico en un sistema conmutado con los tipos de equilibrios mencionados anteriormente debido a las siguientes razones:

- Debido a la presencia de un eigenvalor igual a cero y la ausencia de un eigenvalor tipo silla, los sistemas conmutados sin equilibrio y sistemas conmutados con un número infinito de equilibrios depende solamente de eigenvalores tipo foco estable y foco inestable para obtener una solución oscilatoria. En otras palabras, el sistema oscila hacia infinito y por medio de la conmutación el sistema oscila hacia la estabilidad. Lo anterior no asegura que el sistema sea caótico, debido a que es demasiado difícil de controlar las órbitas del flujo del sistema.

- En el caso de los sistemas conmutados con equilibrio estable todos sus eigenvalores tienen parte real negativa, esto indica que el sistema es estable o asintóticamente estable. Por esta razón, en la Sección 3.3 se decidió incluir un sistema sin equilibrio con sus eigenvalores con parte real positiva, con el propósito de que las órbitas del sistema se expandieran y se contrajeran. Este sistema puede considerarse que es un sistema con un punto de equilibrio estable solamente en uno de sus dominios.

Ahora, encontrar valores específicos para que el sistema presente caos es un verdadero reto. Como solución al problema, se propusieron algunos valores de ciertos parámetros y se recurrió a buscar otros parámetros por medio de la búsqueda sistemática asistida por software.

Los sistemas obtenidos pueden ser considerados como *sistemas lentos*, ya que los espectros de las series de tiempo presentan frecuencias en el orden de los hertz. Además, no es posible obtener diagramas de bifurcación donde se observe rutas de comportamiento periódico rumbo al caos. Sin embargo, a través del diagrama del espectro de los exponentes de Lyapunov es posible detectar regiones de caos. No obstante, se pueden encontrar atractores tipo *toro* y *ciclo límite* a lo largo del intervalo de valores del parámetro estudiado.

Una característica importante de estos sistemas es que el tipo de equilibrio se puede cambiar al variar alguno de sus parámetros. De hecho, es posible combinar sistemas lineales con puntos de equilibrio hiperbólico con sistemas sin equilibrio o con infinitos puntos de equilibrios.

Por otro lado, solamente fue posible desarrollar un sistema sin equilibrio multienroscado gracias al desplazamiento horizontal de la función signo. Un sistema multienroscado con infinitud de equilibrios es más complicado de desarrollar debido a que $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B) < 3$. Lo anterior supone que el vector de términos independientes B ayuda a la traslación del sistema lineal a algún otro lugar del espacio tridimensional. Pero esto no es así, ya que el vector B siempre debe ser linealmente dependiente con respecto a las columnas de A para que así se cumpla la segunda afirmación del teorema de Rouché-Frobenius. En el caso para desarrollar un sistema multienroscado con equilibrios estable, la limitante principal es la que debido a sus eigenvalores el sistema siempre tiende al punto de equilibrio.

Con respecto a los sistemas caóticos con equilibrio variable (Capítulo 4), se desarrollaron atractores por medio de una función de conmutación la cual permite obtener tres dominios. Dos de ellos son gobernados por un punto de equilibrio hiperbólico, mientras que en el dominio central es posible obtener una línea con infinitos puntos de equilibrio o no tener ningún punto de equilibrio. Lo anterior depende de la configuración de un parámetro específico anteriormente mencionado. Además, fue posible la generación del sistema mencionado en cuatro y cinco dimensiones e incluso generalizar dicha teoría para n -dimensiones.

Por la experiencia obtenida al estudiar y desarrollar dichos sistemas, se puede concluir que la existencia de al menos un punto de equilibrio hiperbólico en el sistema facilita la búsqueda de parámetros para encontrar regiones de comportamiento caótico. Además, facilita la manipulación del sistema cuando se requiere expandir el número de enroscados en el

5.1. Trabajo a futuro

atractor.

La literatura especifica que un sistema caótico se caracteriza por poseer un exponente positivo, cero y un negativo (el flujo del sistema se expande en una dirección, se mantiene estable o se contrae en otra dirección); mientras que un sistema hipercaótico posee al menos dos exponentes de positivos (el flujo del sistema se expande en dos direcciones diferentes) cuando el sistema es de n -dimensiones, para $n \geq 4$. Si se analiza con detalle los exponentes de Lyapunov del sistema caótico tridimensional con equilibrio variable (Ec. 4.1) en la Tabla 4.1 se puede observar que existen dos exponentes positivos y uno negativo. Lo anterior no concuerda con la literatura, por lo que podría surgir la interrogante de “¿es posible obtener comportamiento hipercaótico en un sistema tridimensional?” En esta investigación aún no se ha podido encontrar una explicación razonable ha este hecho, lo cual sería interesante realizar una investigación al respecto como trabajo a futuro.

5.1 Trabajo a futuro

Es importante mencionar que el estudio de sistemas conmutados con atractores ocultos aún es un tema muy amplio para continuar su investigación. Principalmente, queda como trabajo a futuro el estudio y desarrollo de sistemas conmutados donde analíticamente sea posible encontrar los valores de los parámetros que lleven al caos sin necesidad de recurrir a la búsqueda sistemática.

Además, es interesante continuar con el desarrollo de técnicas que permitan diseñar de sistemas multienroscados con los diferentes tipos de equilibrio en 1D, 2D y 3D.

Otro tema de estudio es desarrollar sistemas conmutados con atractores ocultos para dimensiones mayores a 4. Es decir, que el sistema presente mas de un exponente de Lyapunov positivo (hipercaos). Todo lo mencionado anteriormente abre la puerta al estudio e investigación de los sistemas conmutados caóticos e hipercaóticos de orden fraccionario.

Por otro lado, es interesante indagar la posibilidad de diseñar sistemas caóticos multienroscados con equilibrios estables con la finalidad de generar una dinámica más complicada y ser usados en las principales áreas de aplicación.

Los sistema caóticos siempre han tenido una amplia gamma dentro de la aplicaciones del mundo real. Principalmente los sistemas con atractores ocultos se han implementado en aplicaciones del cifrado de información y en sistemas de potencia. Sin embargo, es interesante implementar a futuro los sistemas desarrollados en este proyecto de tesis en aplicaciones similares a las mencionadas.

Referencias

- [1] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*. J. Atmos. Sci. **20** (1963).
- [2] M. P. Kennedy, G. Kolumban & G. Kis, *Chaotic modulation for robust digital communications over multipath channels*. Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. **10** (2000).
- [3] K. Z. Li, M. C. Zhao & X. C. Fu, *Projective synchronization of driving–response systems and its application to secure communication*. IEEE Trans. Circuits Syst. I **56** (2009).
- [4] C. Li, Y. Liu, T. Xie, & M. Z. Q. Chen, *Breaking a novel image encryption scheme based on improved hyperchaotic sequences*. Nonlinear Dyn. **73** (2013).
- [5] I. M. Ginarsa, A. Soeprijanto & M. H. Purnomo, *Controlling chaos and voltage collapse using an ANFIS-based composite controller-static var compensator in power systems*. Int. J. Electr. Power Energy Syst. 2013.
- [6] J. M. Ottino, F. J. Muzzio, M. Tjahjadi, J. G. Franjione, S. C. Jana & H. A. Kusch, *Chaos, symmetry, and self-similarity: Exploiting order and disorder in mixing processes*. Science **257**, (1992).
- [7] S. J. Schiff, K. Jerger, D. H. Duong, T. Chang, M. L. Spano & W. L. Ditto, *Controlling chaos in the brain*. Nature **370**, (1994).
- [8] M.E. Brandt & G. Chen, *Bifurcation control of two nonlinear models of cardiac activity*. IEEE Trans. Circuits Syst I: Fundam. Theory Appl. **44** (1997).
- [9] I. T. Georgiou & I. B. Schwartz, *Dynamics of large scale coupled structural/mechanical systems: A singular perturbation/proper orthogonal decomposition approach*. SIAM J. Appl. Math. **59** (1999).

- [10] G. Chen & T. Ueta, *Yet another chaotic attractor*. Int. J. Bifurcat. Chaos **9** (1999).
- [11] J. Lü & G. Chen, *A new chaotic attractor coined*. Int. J. Bifurcat. Chaos **12** (2002).
- [12] L. O. Chua, M. Komuro & T. Matsumoto, *The double scroll family*. IEEE T. Circuits Syst. **33** (1986).
- [13] E. O. Rössler, *An equation for continuous chaos*. Phys. Lett. **57A** (1976).
- [14] J. C. Sprott, *Some simple chaotic flows*. Phys Rev. E **50** (1994).
- [15] J. Lü, & G. Chen, *Generating multiscroll chaotic attractors: theories, methods and applications*. Int. J. Bifurcat. Chaos **16** (2006).
- [16] J. Lü, X. Yu & G. Chen, *Generating chaotic attractors with multiple merged basins of attraction: A switching piecewise-linear control approach*. IEEE Trans. Circuits Syst. I **50** (2003).
- [17] W. M. Ahmad, *A simple multiscroll hyperchaotic system*. Chaos Solitons Fractals, **27** (2006).
- [18] M. E. Yalcin, J. A. K. Suykens & J. Vandewalle, *Families of scroll grid attractors*. Int. J. Bifurcat. Chaos **12** (2002).
- [19] E. Campos-Cantón, J. G. Barajas-Ramírez, G. Solís-Perales & R. Femat, *Mutiscroll attractors by switching systems*. Chaos **20** (2010).
- [20] E. Campos-Cantón, R. Femat & G. Chen, *Attractors generated from switching unstable dissipative systems*. Chaos **22** (2012).
- [21] L. P. Shilnikov, A. Shilnikov, D. Turaev & L. O. Chua, *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics Part I*. World Sci, (1998).
- [22] L. P. Shilnikov, *A case of the existence of a countable number of periodic motions*. Sov. Math. Doklady **6** (1965).
- [23] V.T. Pham, C. Volos & T. Kapitaniak, *Systems with hidden attractors: From theory to realization in circuits*. Springer International Publishing (2017).
- [24] V. T. Pham, C. Volos, S. Jafari, Z. Wei, X. Wang, *Constructing a novel no-equilibrium chaotic system*. Int. J. Bifurcat. Chaos **24** (2014).
- [25] C. Wang, C. Hu, J. Han, S. Cang, *A new no-equilibrium chaotic system and its topological horseshoe chaos*. Advances in Mathematical Physics (2016).

Bibliografía

- [26] A. T. Azar, C. Volos, N. A. Gerodimos, G. S. Tombras, V. T. Pham, A. G. Radwan, S. Vaidyanathan, A. Ouannas, J. M. Munoz-Pacheco, *A novel chaotic system without equilibrium: dynamics, synchronization, and circuit realization*. Complexity (2017).
- [27] Z. Wei, *Dynamical behaviors of a chaotic system with no equilibria*. Phys. Lett. A **376** (2011).
- [28] S. Jafari, J. C. Sprott, S. M. R. H. Golpayegani, *Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria*. Phys. Lett. A **377** (2013).
- [29] S. Jafari, V.T. Pham & T. Kapitaniak, *Multiscroll chaotic sea obtained from a simple 3D system without equilibrium*. Int. J. Bifurcat. Chaos **26** (2016).
- [30] Z. Wang, S. Cang, E. O. Ochola, Y. Sun, *A hyperchaotic system without equilibrium*. Nonlinear Dyn **69** (2012).
- [31] H. Li, X. Liao & M. Luo, *A novel non-equilibrium fractional-order chaotic system and its complete synchronization by circuit implementation*. Nonlinear Dyn **68** (2012).
- [32] D. Cafagna & G. Grassi, *Chaos in a new fractional-order system without equilibrium points*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **19** (2014).
- [33] P. Zhou & F. Yang, *Hyperchaos, chaos, and horseshoe in a 4D nonlinear system with an infinite number of equilibrium points*. Nonlinear Dynam **76** (2014).
- [34] P. Zhou, K. Huang & C. Yang, *A fractional-order chaotic system with an infinite number of equilibrium points*. Discrete Dyn. Nat. Soc. **2013** (2013).
- [35] S. Jafari & J. C. Sprott, *Simple chaotic flows with a line equilibrium*. Chaos Soliton Fract. **57** (2013).
- [36] C. Li & J. C. Sprott, *Chaotic flows with a single nonquadratic term*. Phys. Lett. A **378** (2014).
- [37] Q. Li, S. Hu, S. Tang & G. Zeng, *Hyperchaos and horseshoe in a 4D memristive system with a line of equilibria and its implementation*. Int. J. Circ. Theor. Appl. **42** (2014).
- [38] X. Wang & G. Chen, *A chaotic system with only one stable equilibrium*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **17** (2012).
- [39] M. Molaie, S. Jafari & J.C. Sprott, *Simple chaotic flows with one stable equilibrium*. Int. J. Bifurc. Chaos **24** (2013).
- [40] S. K. Lao, Y. Shekofteh, S. Jafari & J. C. Sprott, *Cost function based on Gaussian mixture model for parameter estimation of a chaotic circuit with a hidden attractor*. Int. J. Bifurc. Chaos **24** (2014).

- [41] S. T. Kingni, S. Jafari, H. Simo & P. Wooafo, *Three-dimensional chaotic autonomous system with only one stable equilibrium: Analysis, circuit design, parameter estimation, control, synchronization and its fractional-order form*, Eur. Phys. J. Plus **129** (2014).
- [42] V. T. Pham, S. Jafari, C. Volos & T. Kapitaniak, *Different families of hidden attractors in a new chaotic system with variable equilibrium*. Int J. Bifurc. Chaos **27** (2017).
- [43] Q. Yang, Z. Wei & G. Chen, *A chaotic system with one saddle and two stable node-foci*. Int J. Bifurc. Chaos **18** (2008).
- [44] Q. Yang, Z. Wei & G. Chen, *An unusual 3D chaotic system with two stable node-foci*. Int J. Bifurc. Chaos **20** (2010).
- [45] R. J. Escalante-González, E. Campos-Cantón & Matthew Nicol, *Generation of multi-scroll attractors without equilibria via piecewise linear systems*. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **27** (2017)
- [46] R. J. Escalante-González, E. Campos-Cantón, *Analysis of a class of complex system without equilibria via switched control law*. **51** (2018)
- [47] J. Starke, M. P. Sorensen, P. Hjorth, J K. Moller, L. E. Christiansen, H. Madsen, *An introduction to mathematical modelling, nonlinear dynamics, stochastic and complex systems*. MMC summer school (2010) 3rd Ed.
- [48] L. Perko, *Differential equations and dynamicla systems*. Springer (1996) 2nd Ed.
- [49] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*. Westview Press (2003) 2nd Ed.
- [50] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, *Determining Lyapunov exponents from a time series*. Physica D **16** (1985).
- [51] M. T. Rosenstein, J.J. Collins, C.J. Luca, *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets*. Physica D (1993).
- [52] J. C. Sprott, *Elegant chaos: algebraically simple chaotic flows*. World Scientific (2010).
- [53] J. P. Eckmann, D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*. Rev. Mod. Phys. **57** (1985).
- [54] J. D. Farmer, E. Ott, J. A. Yorke, *The dimension of chaotic attractors*, Physica D (1983).
- [55] J. Kaplan, J. Yorke, *Chaotic behavior of multidimensional difference equations*, In Functional Differential equations and approximation of fixed points. Springer (1979).
- [56] L. S. Young, *Dimension, Entropy, and Lyapunov Exponents*, Ergodic theory and dynamical systems, **2(1)** (1982).

Bibliografía

- [57] E. Zeraoulia & J. C. Sprott, *2-D quadratic maps and 3-D ODE systems: A rigorous approach*. *Inte*, **Vol. 73** (2010).
- [58] C. Li, J. C. Sprott, Z. Yuan, H. Li, *Constructing chaotic systems with total amplitude control*. *Int J. Bifurc. Chaos*, **Vol. 25** (2015).
- [59] T. Gotthans, J. Petrzela, *New class of chaotic systems with circular equilibrium*. *Nonlinear Dyn* **73** (2015).
- [60] T. Gotthans, J. C. Sprott, J. Petrzela, *Simple chaotic flow with circle and square equilibrium* *Int J. Bifurc. Chaos*, **Vol. 26** (2016).
- [61] S. T. Kingni, V. T. Pham, S. Jafari, G. R. Kol, P. Wofo, *Three-dimensional chaotic autonomous system with circular equilibrium: analysis, circuit implementation and its fractional-order form*. *Circuits Syst. Signal Process* **35** (2016).
- [62] V. T. Pham, S. Jafari, X. Wang, J. Ma, *A chaotic system with different shapes of equilibria*. *Int J. Bifurc. Chaos*, **Vol. 26** (2016).
- [63] M. F. Danca & N. Kuznetsov, *Matlab code for Lyapunov exponents of fractional-order systems*. *Int J. Bifurc. Chaos*, **Vol. 28** (2018).
- [64] E. W. von Tschirnhaus, R. F. Green, *A method for removing all intermediate terms from a given equation*. *ACM SIGSAM Bulletin*, **37** (2003).
- [65] O. E. RöSSLer, *An equation for hyperchaos*. *Phys. Lett.* 57A (1979) **71(2-3)**.
- [66] C. Bandt, B. Pompe, *Permutation entropy: A natural complexity measure for time series*. *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002).
- [67] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*. *Bell Syst. Techn. J.* **27** (1948).
- [68] M. Riedl, A. Müller and N. Wessel, *Practical considerations of permutation entropy. A tutorial review*. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **222** (2013).

Apéndice A

Búsqueda sistemática asistida para encontrar sistemas caóticos

Este apéndice presenta los programas y funciones implementados en MATLAB R2018a de la búsqueda sistemática de parámetros para encontrar regiones de caos en un intervalo de valores para sistemas caóticos con atractores ocultos. El presente programa busca valores apropiados para el sistema sin equilibrio, sin embargo, con la modificación de las ecuaciones diferenciales en la función `JAC` se encuentran los parámetros necesarios para los sistemas con infinitos equilibrios y con un solo equilibrio estable.

A.1 Rutina principal

Ésta sección presenta el programa principal de la búsqueda sistemática para encontrar el parámetro k del sistema caótico sin equilibrio de la Ec. 3.6. Ésta función calcula los exponentes de Lyapunov, la dimension de Kaplan-Yorke y la disipación del sistema para cada uno de los valores de k en dicho intervalo. Los resultados obtenidos se guardan en una matriz denominada *Matrix* y es exportada a un archivo excel llamado '*ExpLypF*'. Éste programa es usado para encontrar los parámetros necesarios para el sistema con infinitos puntos de equilibrio y el sistema con un solo equilibrio estable.

```
close all
clear all
clc
```

```

global b k
Matrix = zeros(1,7);
CIs=[0.05,0.05,0.05];
op = 1;
if(op == 0)
    name = 'ExpLyp01';
    j = 1;
    b = 1;
    tic
    for k = -3:0.1:3
        [T,LE]=lyapunov(3,@Jac_Y2,@ode45,0,0.025,1000,CIs,0);
        V = size(LE);
        Dim = 2 + (1/abs(LE(V(1,1),3))) * (LE(V(1,1),1) + LE(V(1,1),2));
        Diss = LE(V(1,1),1) + LE(V(1,1),2) + LE(V(1,1),3);
        Matrix(j,:) = [b k LE(V(1,1),1) LE(V(1,1),2) LE(V(1,1),3) Diss Dim];
        j = j + 1;
    end
    toc
    xlswrite(name,Matrix)
else
    M = xlsread('ExpLyp');
    j = 1;
    tic
    for i = 1:59
        b = M(i,1);
        k = M(i,2);
        [T,LE]=lyapunov(3,@Jac_Y2,@ode45,0,0.025,5000,CIs,0);
        V = size(LE);
        Dim = 2 + (1/abs(LE(V(1,1),3))) * (LE(V(1,1),1) + LE(V(1,1),2));
        Diss = LE(V(1,1),1) + LE(V(1,1),2) + LE(V(1,1),3);
        Matrix(j,:) = [M(i,1) M(i,2) LE(V(1,1),1) LE(V(1,1),2) LE(V(1,1),3) Diss Dim];
        j = j + 1;
    end
    toc
    xlswrite('ExpLypF',Matrix,'Hoja2')
end

```


A.2 Función lyapunov

Ésta sección presenta la función secundaria que calcula los exponentes de Lyapunov del sistema dinámico. El método de esta función se basa en el algoritmo de Wolf.

```
function [Texp,Lexp]=lyapunov(n,rhs_ext_fcn,fcn_integrator,tstart,stept,tend,ystart,ioutp);
n1=n; n2=n1*(n1+1);
nit = round((tend-tstart)/stept);
y=zeros(n2,1); cum=zeros(n1,1); y0=y;
gsc=cum; znorm=cum;
y(1:n)=ystart(:);
for i=1:n1 y((n1+1)*i)=1.0; end
t=tstart;
for ITERLYAP=1:nit
    [T,Y] = feval(fcn_integrator,rhs_ext_fcn,[t t+stept],y);
    t=t+stept;
    y=Y(size(Y,1),:);
    for i=1:n1
        for j=1:n1 y0(n1*i+j)=y(n1*j+i); end
    end
    znorm(1)=0.0;
    for j=1:n1 znorm(1)=znorm(1)+y0(n1*j+1)^2; end
    znorm(1)=sqrt(znorm(1));
    for j=1:n1 y0(n1*j+1)=y0(n1*j+1)/znorm(1); end
    for j=2:n1
        for k=1:(j-1)
            gsc(k)=0.0;
            for l=1:n1 gsc(k)=gsc(k)+y0(n1*l+j)*y0(n1*l+k); end
        end
        for k=1:n1
            for l=1:(j-1)
                y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)-gsc(l)*y0(n1*k+l);
            end
        end
        znorm(j)=0.0;
        for k=1:n1 znorm(j)=znorm(j)+y0(n1*k+j)^2; end
        znorm(j)=sqrt(znorm(j));
        for k=1:n1 y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)/znorm(j); end
    end
    for k=1:n1 cum(k)=cum(k)+log(znorm(k)); end
end
```

```

for k=1:n1
    lp(k)=cum(k)/(t-tstart);
end
if ITERLYAP==1
    Lexp=lp;
    Texp=t;
else
    Lexp=[Lexp; lp];
    Texp=[Texp; t];
end
if (mod(ITERLYAP,ioutp)==0)
    fprintf('t=%6.4f',t);
    for k=1:n1 fprintf('%10.6f',lp(k)); end
    fprintf('\n');
end
for i=1:n1
    for j=1:n1
        y(n1*j+i)=y0(n1*i+j);
    end
end
end
end

```

A.3 Función Jac_Y2

Ésta función contiene las ecuaciones del sistema dinámico. Además, contiene el sistema linealizado a través de la matriz Jac.

```

function f=Jac_Y2(t,X)
global k b
sigma = 0.25;
omega = 3;
n = 500;
x1=X(1); x2=X(2); x3=X(3);
Y= [X(4), X(7), X(10); X(5), X(8), X(11); X(6), X(9), X(12)];
f=zeros(9,1);

%Equations
f(1) = x2 + x3;
f(2) = -sigma*x2 + omega*x3;
f(3) = -omega*x2 - k*x3*tanh(n*x1) + b;

```

A.4. Clasificador de sistemas

```
%Linearized system
Jac=[0, 1, 1; 0, -sigma, omega; -n*k*x3*(sech(n*x1))^2, -omega, -k*tanh(n*x1)];

%Variational equation
f(4:12)=Jac*Y;
```

A.4 Clasificador de sistemas

Según la Tabla 2.1, esta función clasifica el tipo de sistema dinámico (inestable, ciclo límite, toro, caótico) de acuerdo al parámetro k asignado y sus exponentes de Lyapunov obtenidos, siendo de nuestro interés los sistemas caóticos.

```
close all
clear all
clc
tic
name = 'ExpLyp01';
T = xlsread(name);
t = size(T);
Chaos = zeros(1,7);
m = 0.001;
n = 1;
for i=1:t(1,1)
    if( T(i,3) >m && abs(T(i,4)) <= m && T(i,5) <-m )
        Chaos(n,:) = T(i,:);
        n = n + 1;
    end
end
xlswrite(name,Chaos,'Chaos')
toc
```


Apéndice B

Búsqueda sistemática para encontrar parámetros de sincronización

Este apéndice presenta los programas y funciones implementados en MATLAB R2018a de la búsqueda sistemática de parámetros de acoplamiento y sincronización de sistemas caóticos sin equilibrio o con una infinidad de equilibrios.

B.1 Función principal

```
close all
clear all
clc
global k1 k2
dt = 0.01;
k2 = 5;
CIs=[0,-0.05,1, 1,-1,1];
tic
w = 0:0.001:5;
M = zeros(1,2);
j = 1;
for k1=w
```

```

[T,X] = ode45('System_LECoupled',0:dt:5000,CIs);
t = find(T >1000);
x1 = X(t,1); x2 = X(t,2); x3 = X(t,3);
y1 = X(t,4); y2 = X(t,5); y3 = X(t,6);
N = length(x1);
M(j,:) = [k1 sqrt((1/(N-1))*sum((x1-y1).^2 + (x2-y2).^2 + (x3-y3).^2))];
j = j + 1;
end
xlswrite('STD_LE',M)
toc

```

B.2 Función System_LECoupled

```

function df=System_LECoupled(t,X)
    x1=X(1); x2=X(2); x3=X(3);
    y1=X(4); y2=X(5); y3=X(6);
    global k1 k2
    p = 0.25;
    q = 3;
    b = 0.2;
    dx1 = x2 + x3;
    dx2 = -p*x2*sign(x1) + q*x3;
    dx3 = -q*x2 - p*x3*sign(x1) + (1.1*x2 + 2*x3 - b)*sign(x1) + b + k1*(y3 - x3);
    dy1 = y2 + y3;
    dy2 = -p*y2*sign(y1) + q*y3;
    dy3 = -q*y2 - p*y3*sign(y1) + (1.1*y2 + 2*y3 - b)*sign(y1) + b + k2*(x3 - y3);
    df = [dx1;dx2;dx3;dy1;dy2;dy3];
end

```