UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

FACULTAD DE CIENCIAS

ARISTA-COLORACIONES ACÍCLICAS EN GRÁFICAS 4-REGULARES 4-CONEXAS $K_{1,3}$-LIBRES

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN CIENCIAS APLICADAS

PRESENTA

LME NANCY JAZMÍN PÉREZ ORTIZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. CÉSAR ISRAEL HERNÁNDEZ VÉLEZ

SAN LUIS POTOSÍ, SLP AGOSTO 2021

TESIS DE MAESTRÍA

ARISTA-COLORACIONES ACÍCLICAS EN GRÁFICAS 4-REGULARES 4-CONEXAS $K_{1,3}$-LIBRES

Tesis que presenta:

LME Nancy Jazmín Pérez Ortiz

Comité que acepta la tesis:

Dr. César Israel Hernández Vélez Asesor de tesis	Dr. Lev Glebsky Sinodal
Dr. Gelasio Salazar Anaya Sinodal	Dr. Edgardo Ugalde Saldaña Sinodal

Agosto 2021

Declaración de autoría y originalidad de la tesis

Yo, Nancy Jazmín Pérez Ortiz, estudiante del Posgrado en Ciencias Aplicadas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, como autora de la tesis «Arista-coloraciones acíclicas en gráficas 4-regulares 4-conexas $K_{1,3}$-libre», declaro que la tesis es una obra original, inédita, auténtica, personal, que se han citado las fuentes correspondientes y que en su ejecución se respetaron las disposiciones legales vigentes que protegen los derechos de autor y de propiedad intelectual e industrial. Las ideas, doctrinas, resultados y conclusiones a los que he llegado son de mi absoluta responsabilidad.

Resumen

Una arista-coloración de una gráfica simple G es una asignación de colores a las aristas de la gráfica tal que no haya dos aristas adyacentes con el mismo color. La arista-coloración es acíclica si la subgráfica inducida por cualesquiera dos clases de colores es un bosque lineal (una gráfica acíclica con grado máximo 2). En este trabajo estudiaremos arista-coloraciones acíclicas en gráficas 4-regulares, 4-conexas $K_{1,3}$-libre. Esta familia de gráficas se clasifica en 3 clases, denominadas $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$. Determinamos el índice cromático acíclico (el menor número de colores necesarios para un arista-coloración acíclica) para cada clase en la familia, mostrando una técnica para encontrar la arista-coloración acíclica.

Abstract

An edge-coloring of a simple graph G is an assignment of colors to each edge of the graph such that no adjacent edges have the same color. The edge-coloring of a graph is acyclic if the subgraph induced by any two color classes is a linear forest (an acyclic graph with maximum degree equals to 2). In this work we study acyclic edge-coloring in 4-connected 4-regular $K_{1,3}$-free graphs. This family has been classified in 3 classes, named $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_1$ and $\mathcal{G}_2$. We determine the acyclic chromatic index (the least number of colors in an acyclic edge-coloring) for every class in the family, showing a technique to find the acyclic edge-coloring.

Agradecimientos

Agradezco al CONACYT por el apoyo económico brindado durante la realización de esta maestría. Al posgrado en Ciencias Aplicadas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, así como a todos los profesores que estuvieron conmigo a lo largo de los dos años que tuve clases, sobre todo a Edgardo Ugalde. Agradezco a mi director de tesis, el Dr. César Israel Hernández Vélez, por su paciencia, confianza, orientación y apoyo que contribuyó de manera fundamental a que esta tesis llegara a buen término. Finalmente, agradezco a mi mamá, María Guadalupe Ortiz Sosa, a mi hermana Cristal Pérez Ortiz y a mi esposo Christian Abel Contreras Hernández, quienes fueron y son mi soporte, no solo en el ámbito académico pero que me han ayudado de forma sustancial en el mismo. ¡Gracias a todos!

Índice general

1. Introducción **1**

2. Preliminares **4**

3. Arista-coloración acíclica **9**

3.1. Gráficas 4-conexas, 4-regulares, $K_{1,3}$-libres 9

3.2. Arista-coloración acíclica 12

3.3. Arista-coloraciones propias acíclicas en gráficas de $\mathcal{G}_0$ 12

3.4. Arista-coloraciones propias acíclicas en gráficas de $\mathcal{G}_1$ 20

3.5. Arista-coloraciones propias acíclicas en gráficas de $\mathcal{G}_2$ 32

Bibliografía **39**

Capítulo 1

Introducción

La teoría de coloración de gráficas tiene una posición central en matemáticas discretas, en la cual han surgido diversos problemas que incorporan el análisis tanto geométrico como algebraico de los mismos y aunque muchos problemas han sido resueltos de manera satisfactoria, otros en cambio siguen sin resolverse. Se han encontrado errores en algunos de los problemas en coloraciones que se creyeron resueltos, por lo que después surgieron demostraciones que sí pudieron ser verificadas.

Los primeros resultados sobre las coloraciones eran sólo para gráficas planares. Los originó uno de los problemas más importantes del área, la Conjetura de los 4 colores, propuesta por Francis Guthrie en 1852, la cual establece que “es posible colorear las regiones de una gráfica plana sólo con 4 colores, tal que dos regiones adyacentes tengan colores diferentes”. Después de muchas pruebas y contraejemplos falsos [5], esta conjetura se convirtió en el Teorema de los 4 colores, al ser demostrado por Kenneth Appel y Wolfgang Haken en 1976, mediante el uso de herramientas computacionales. Algunos matemáticos no aceptaban la demostración debido a su naturaleza, pero poco a poco ha adquirido aprobación entre la comunidad científica. Este teorema tiene aplicaciones en cartografía [11].

Recordemos que una arista-coloración (vértice-coloración) de una gráfica asigna a dos aristas (vértices, respectivamente) adyacentes colores diferentes. El número mínimo de colores requeridos para obtener una arista-coloración (vértice-, respectivamente) es llamado índice (número, respectivamente) cromático, denotado por χ' (χ, respectivamente). Por el Teorema de Vizing sabemos que $\Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1$, donde Δ es el grado máximo de la gráfica. Por lo tanto, podemos clasificar las gráficas en dos clases: i) las que tienen índice cromático igual a Δ, y ii) las que tienen índice cromático igual a $\Delta+1$. Este teorema es de vital importancia para el estudio de coloraciones, incluso tiene aplicaciones en vértice-coloraciones [15]. Además, para multigráficas este teorema establece que el índice cromático está dado por $\Delta \leq \chi' \leq \Delta + \mu$, donde μ representa la máxima multiplicidad (el mayor número de aristas entre dos vértices) de la gráfica. El Teorema de Vizing fue inspirado en el trabajo previo de Claude Shannon, quien demostró que para cualquier multigráfica $\chi' \leq \frac{3}{2}\Delta$ [20]. El problema de encontrar el índice cromático es NP-completo [12].

Las arista-coloraciones tienen importantes aplicaciones en frecuencias, recorridos en ciudades, caminos, entre otros. Además proporciona las bases para un estudio más amplio dentro del área como las arista-coloraciones fuertes [4], y la Teoría de Ramsey [13]. La cuestión de asignar colores a una gráfica ha sido estudiada como un problema algorítmico desde principios de los 70: el problema de encontrar el número cromático es uno de los 21 problemas NP-completos de Karp [14], los cuales se encuentran dentro del área de la teoría de complejidad computacional y que han sido estudiados por algunos autores como Jerzy A. Filar, Michael Haythorpe y Richard Taylor [8].

Decimos que una arista-coloración es acíclica si cada ciclo tiene al menos 3 colores. El número mínimo de colores requerido para obtener una arista-coloración acíclica es llamado índice cromático acíclico y denotado por a'. Observemos que $a' \geq \chi' \geq \Delta$ [7]. En este trabajo nos enfocaremos en las arista-coloraciones acíclicas. Hay varias aplicaciones de las coloraciones acíclicas de una gráfica que incluyen el cálculo hessiano, aplicaciones en la teoría de la codificación, así como otros problemas teóricos.

Noga Alon, Colin McDiarmid y Bruce Reed [2] hicieron la siguiente conjetura respecto a arista-coloraciones acíclicas.

Conjetura 1 (N. Alon, B. Sudakov y A. Zaks [2])**.** *Cada gráfica simple con grado máximo Δ tiene una $(\Delta+2)$-arista-coloración propia acíclica.*

En el artículo donde aparece esta conjetura, se probó que la conjetura es cierta para gráficas con cuello por lo menos $C\Delta\ \log(\Delta)$, para una constante C, y para casi todas las gráficas Δ-regulares. Las cotas respecto a esta conjetura han mejorado, y uno de las primeros resultados al respecto es de Noga Alon, Colin McDiarmid y Bruce Reed [1] quienes, utilizando métodos probabilísticos, probaron que $a'(G) \leq 64\Delta$, para cualquier gráfica G. Este resultado fue mejorado por Michael Molloy y Bruce Reed [16] quienes demostraron que $a'(G) \leq 16\Delta$. Sokol Ndreca, Aldo Procacci y Benedetto Scoppola [17] probaron que $a'(G) \leq \lceil 9.62(\Delta-1) \rceil$. Louis Espenet y Aline Parreau [6] demostraron que $a'(G) \leq 4\Delta$. Ioannis Giotis, Lefteris Kirousis, Kostas I. Psaromiligkos y Dimitrios M. Thilikos [10] establecieron que $a' \leq \lceil 3.74(\Delta-1) \rceil + 1$.

Como es recurrente ante una conjetura, los esfuerzos se centran en familias particulares de gráficas para establecer estrategias que permitan determinar el índice cromático acíclico y tratar de extender las técnicas a otras familias. En este sentido, Manu Basavaraju y L. Sunil Chadran [3] probaron que la conjetura se cumple para gráficas conexas con $\Delta \leq 4$. Recientemente, Weifan Wang, Yulai Ma, Oiaojun Shu y Yiquiao Wang [21, 25] demostraron la conjetura para gráficas 4-regulares. Por otro lado, de manera reciente se probó que $a'(G) \leq 12$ para $\Delta = 7$ por Juan Wang, Lianying Miao, Wenyao Song y Yunlong Liu [24].

Nuestro interés es determinar el índice cromático acíclico de las gráficas 4-regulares, 4-conexas, $K_{1,3}$-libre (es decir, sin $K_{1,3}$ como subgráfica inducida), ya que Michel Plummer [18] clasificó a esta familia en 3 clases, llamadas $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$. Posteriormente, Trevor J. Gionet Jr., Erika L.C. King y Yixiao Sha [9] complementaron la clasificación hecha por Plummer.

Capítulo 2

Preliminares

A través de este trabajo estaremos utilizando conceptos propios de la Teoría de gráficas, en particular, los que enunciamos a continuación.

Una ***gráfica*** G es un par ordenado $(V(G), E(G))$ formado por un conjunto no vacío $V(G)$, cuyos elementos son llamados ***vértices***, y un conjunto $E(G)$ de pares no ordenados de vértices llamados ***aristas***, es decir $E(G) \subset \{V(G)\}^2$. Si $\{u, v\} \in E(G)$, lo denotamos simplemente como $uv \in E(G)$. Si la gráfica está sobreentendida y no existe confusión, escribimos simplemente V y E para $V(G)$ y $E(G)$), respectivamente.

El ***orden*** de una gráfica es la cardinalidad del conjunto de vértices $V(G)$ y el ***tamaño*** es la cardinalidad del conjunto de aristas. Usualmente, denotamos $|V(G)| = n$ y $|E(G)| = m$. Una gráfica es ***finita*** si tiene un número finito de vértices y aristas.

Decimos que dos vértices u y v son ***adyacentes*** si $uv \in E(G)$, que el vértice v es ***incidente*** con la arista uv, y los vértices u, v son los ***extremos*** de la arista uv. Dos aristas son ***adyacentes*** si tienen un extremo en común y son ***paralelas*** si tienen los mismos extremos y son distintas. Una arista es un ***lazo*** si sus extremos son el mismo vértice. Una gráfica es ***simple*** si no tiene aristas paralelas ni lazos. Una ***multigráfica*** es una gráfica con aristas paralelas sin lazos, se llama. La ***máxima multiplicidad*** en una multigráfica, denotada por μ, es el máximo número de aristas que conectan a cualesquiera do vértices de la gráfica. Una gráfica es ***completa*** si cualquier par de vértices son adyacentes.

Un ***emparejamiento*** en una gráfica es un conjunto de aristas que no tienen vértices en común. Si M es un emparejamiento, los extremos de una arista en M se dicen ***emparejados*** por M y cada vértice incidente con una arista de M se dice ***cubierto*** o ***saturado*** por M. Un ***emparejamiento perfecto*** es un emparejamiento que cubre todos los vértice de la gráfica. Dada una gráfica G que contiene un emparejamiento perfecto y un entero positivo k, con $1 \leq k \leq \frac{|V(G)|-2}{2}$, decimos que G es k***-extensible*** si cada emparejamiento de tamaño k se extiende a un emparejamiento perfecto.

El ***grado*** de un vértice v, denotado $d(v)$, es el número de aristas incidentes con él (un lazo cuenta doble). El ***grado mínimo*** de una gráfica G, denotado $\delta(G)$, es el mínimo de los grados de los vértices de G, es decir, $\delta(G)\,\text{mín}\{d(v)\colon\ v \in V(G)\}$. El ***grado máximo*** de G, denotado $\Delta(G)$, es el máximo de los grados de los vértices de G, es decir, $\Delta(G) = \text{máx}\{d(v) : v \in V(G)\}$. Si $\delta(G) = \Delta(G) = r$, decimos que la gráfica G es r***-regular***. Si no existe confusión, escribimos simplemente Δ y δ.

Una gráfica $G' = ((V'(G'), E'(G'))$ es una ***subgráfica*** de la gráfica $G = (V(G), E(G))$ si $V(G') \subseteq V(G)$ y $E(G') \subseteq E(G)$. Dado $X \subseteq V(G)$, la ***subgráfica inducida*** por X, denotada por $G\,[X]$, es la gráfica cuyo conjunto de vértices es X y donde uv es una arista de $G\,[X]$ si y sólo si uv es una arista de G. Si $F \subseteq E(G)$, son referimos a la ***subgráfica arista-inducida*** por F, denotada por $G[F]$, a la subgráfica de G donde el conjunto de arista es F y el conjunto de vértices son los extremos de la aristas en F. Utilizaremos simplemente subgráfica inducida para referirnos tanto a la gráfica inducida por un conjunto de vértices como por un conjunto de aristas.

Una gráfica que no contienen a $K_{1,3}$ como subgráfica inducida se llama $K_{1,3}$***-libre***, también se llaman (en inglés) ***claw-free***.

Para cualquier conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ de una gráfica G, denotamos $G - X$ a la gráfica inducida $G[V \setminus X]$. Si $U = \{v\}$ es un conjunto unitarios, escribimos $G - v$ en lugar de $G - \{v\}$. Para cualquier conjunto de aristas $F \subseteq E(G)$, definimos $G - F \coloneqq (V, E \setminus F)$. Si $F \subseteq \{V(G)\}^2$, definimos $G + F \coloneqq (V, E \cup F)$. Si $F = \{e\}$ es un conjunto unitario, escribimos $G - e$ y $G + e$ en lugar de $G - \{e\}$ y $G + \{e\}$, respectivamente.

Para ***identificar*** dos vértices no adyacentes, x, y, de una gráfica G, reemplazamos ambos vértices por sólo un vértice, el cual sea incidente a todas las aristas de G que lo eran con x o y, denotamos $G/\{x, y\}$ a la gráfica resultante. Para ***contraer*** una arista e de una gráfica G, primero la eliminamos y después identificamos sus extremos, denotamos G/e a la gráfica resultante.

Un ***paseo*** en una gráfica G es una sucesión de vértices $(v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ tal que $v_{i-1}v_i \in E$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \ldots, \ell\}$. Si el paseo no repite aristas se llama ***trayectoria***, y si no repite vértices se llama ***camino***. Si un camino comienza en un vértice $u = v_0$ y termina en un vértice $v = v_\ell$, nos referimos a él como un uv***-camino***. Un paseo ***paseo cerrado*** es un paseo que comienza en un vértice $u = v_1$, termina en un vértice $v = v_\ell$ y $u = v$. Un pase cerrado también se suele llamar ***circuito***. Si $(v_0, \ldots, v_\ell)$ es un camino entonces $(v_0, \ldots, v_\ell) \cup v_0v_\ell$ es un ***ciclo***. La ***longitud*** de un paseo, trayectoria, camino o ciclo es su número de aristas.

Dos vértices u y v están ***conectados*** si existe un uv-camino. Una gráfica es ***conexa*** si para todo par de vértices u y v existe un uv-camino. Si G no es conexa, decimos que es ***disconexa***. Una ***componente*** de una gráfica es una subgráfica conexa maximal.

Un ***corte de vértices*** de una gráfica G es un subconjunto de vértices $S \subset V(G)$, tal que $G\left[V(G) \setminus S\right]$ es disconexa. Una gráfica es k***-conexa*** si para cualquier subconjunto $S \subseteq V$, con $|S| = k$, $G[V(G) \setminus S]$ es conexa. La ***conexidad*** de una gráfica G, denotada como $\kappa(G)$, es la cardinalidad mínima de un corte de vértices, es decir, $\kappa(G) = \text{mín}\{|S| : S \text{ es un corte de vértices de } G\}$.

Un ***corte de aristas*** de G es un subconjunto de aristas $F \subset E(G)$, tal que $G\left[E(G) \setminus F\right]$ es disconexa. Una arista que al ser removida aumenta el número de componentes de G

es llamada ***puente***. Una gráfica G es ***k-arista-conexa*** si para cualquier subconjunto $F \subseteq E(G)$, con $|F| = k$, $G[E(G) \setminus F])$ es conexa. La ***arista-conexidad*** de una gráfica G, denotada $\kappa'(G)$, es la cardinalidad mínima de un corte de aristas, es decir, $\kappa'(G) = \text{mín}\{|F| : F \text{ es un corte de aristas de } G\}$.

La ***arista-conexidad cíclica*** de una gráfica G es el mínimo tomado sobre la cardinalidad de todos los cortes de aristas F de G tal que al menos dos componentes de $G - F$ contienen un ciclo. Denotamos la arista-conexidad cíclica de G como $c\lambda(G)$. Decimos que G es k-arista-conexa cíclica para toda $k \leq c\lambda(G)$.

Una gráfica es ***bipartita*** si existen dos conjuntos A y B de vértices de G tales que $A \cup B = V(G)$, $A \cap B = \emptyset$, y si $uv \in E(G)$, entonces $u \in A$ y $v \in B$, o $u \in B$ y $v \in A$.

Dada una gráfica G, la ***gráfica de línea*** de G, denotada $L(G)$, es la gráfica cuyos vértices son las aristas de G, en donde dos vértices serán adyacentes si y sólo si las aristas correspondientes son adyacentes. La figura 2.1 muestra un ejemplo de ello.

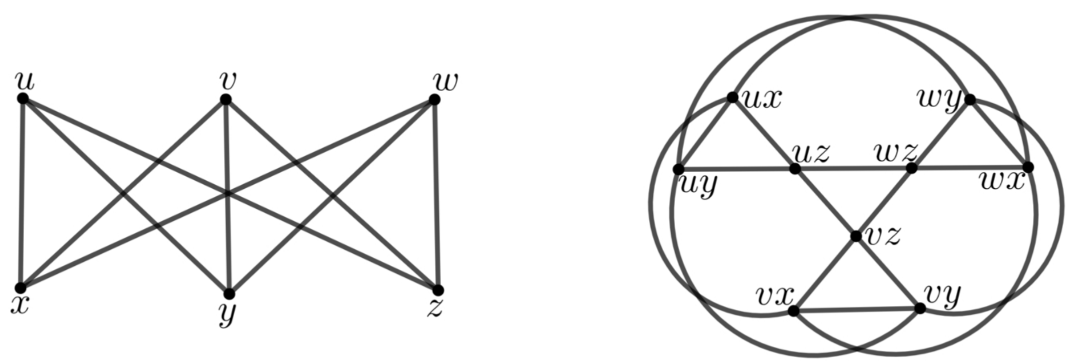


Figura 2.1: A la izquierda la gráfica $K_{3,3}$, y a la derecha su gráfica de línea $L(K_{3,3})$.

La ***gráfica de Harary*** $H_{r,n}$ es una gráfica r-regular de orden n, tal que:

- $V(H_{r,n}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
- Si r es par, digamos $r = 2k$ para algún entero no negativo k, con $k \leq \frac{n-1}{2}$. Para cada i, $1 \leq i \leq n$, v_i es adyacente con $v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_{i+k}$ y con $v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_{i-k}$, donde los índices son tomados módulo n.

- Si r es impar, digamos $r = 2k+1$, para algún entero no negativo k, con $k \leq \frac{n-2}{2}$. Como r es impar, n tiene que ser par, digamos $n = 2\ell$. Para cada i, $1 \leq i \leq n$, v_i es adyacente con v_{i+1}, $v_{i+2}, \ldots, v_{i+k}$, con $v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_{i-k}$ y con $v_{i+\ell}$, donde los índices son tomados módulo n.

Una k***-arista-coloración*** (propia) es un mapeo $c\colon E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $c(e) \neq c(f)$, para cualesquiera e, f adyacentes. Los números $1, 2, \ldots, k$ se conocen como ***colores***. El número mínimo de colores k requerido para obtener una arista-coloración es llamado ***índice cromático***, y es denotado por χ'. Al conjunto de aristas de un mismo color se conoce como ***clase cromática***. Es fácil ver que cualquier subconjunto de aristas de una clase cromática forma un emparejamiento. Una arista-coloración es ***acíclica*** si cada ciclo tiene al menos 3 colores, equivalentemente, si la gráfica inducida por cualesquiera dos clases cromáticas es un bosque. El número mínimo de colores requerido para obtener una arista-coloración acíclica es llamado ***índice cromático acíclico***, y denotado por a'. Es sencillo notar que se cumple que $\Delta \leq \chi' \leq a'$.

Una k***-vértice-coloración*** (propia) es un mapeo $c\colon V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$, para cualesquiera u, y adyacentes. Los números $1, 2, \ldots, k$ se conoces como ***colores***. Una gráfica es k-vértice-coloreable si tiene una k-vértice-coloración. El número mínimo de colores k requerido para obtener una vértice-coloración es llamado ***número cromático***, y es denotado por χ.

Capítulo 3

Arista-coloración acíclica en gráficas 4-conexas, 4-regulares, $K_{1,3}$-libres

3.1. Gráficas 4-conexas, 4-regulares, $K_{1,3}$-libres

La familia de las gráficas 4-conexas, 4-regulares $K_{1,3}$-libres fue clasificada por Plummer [19]. Posteriormente Gionet Jr., King y Sha [9] complementaron esta clasificación. En esta sección, cuando nos refiramos a una gráfica G, asumiremos que es 4-conexa 4-regular $K_{1,3}$-libre, a menos que se especifique lo contrario. La familia quedó determinada en tres clases de gráficas, denominadas $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$, cuyas características son las siguientes.

$\mathcal{G}_0$. Una gráfica G pertenece a $\mathcal{G}_0$ si contienen a K_4 y, por tanto $G = K_5$ o el conjunto de vértices $V(G)$ se puede partir en subconjuntos disjuntos de 4 vértices cada uno, tal que cada subconjunto induce un K_4, y las aristas que no pertenecen a los K_4 forman un emparejamiento perfecto de G que los conecta. El orden de cada gráfica en $\mathcal{G}_0$, excepto por K_5, es par. Cada gráfica en $\mathcal{G}_0$, excepto K_5 es 2-extensible. La figura 3.1 muestra un ejemplo de una gráfica en la clase $\mathcal{G}_0$.

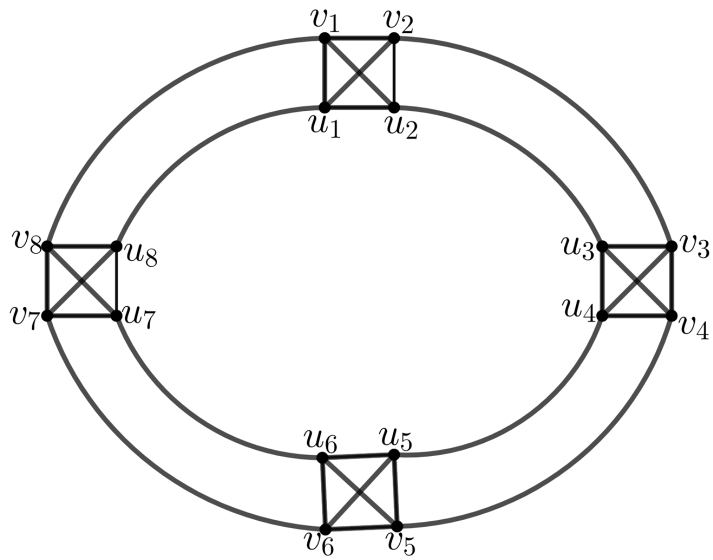


Figura 3.1: Gráfica de la clase $\mathcal{G}_0$

$\mathcal{G}_1$. Una gráfica G pertenece a $\mathcal{G}_1$ si es una gráfica de Harary, $H_{4,k}$, con $k \geq 6$. Para $G \in \mathcal{G}_1$, K_4 no es subgráfica de G y cada vértice está en exactamente tres triángulos. La figura 3.2 muestra un ejemplo de una gráfica en la clase $\mathcal{G}_1$.

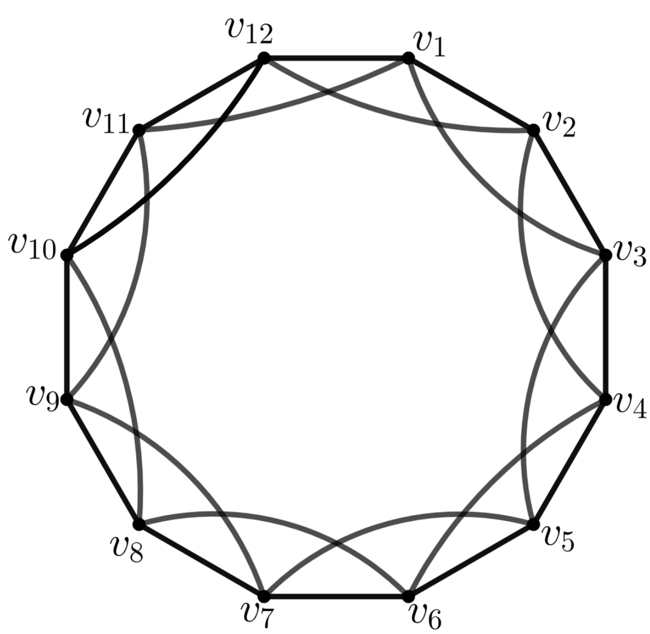


Figura 3.2: Gráfica par de Harary.

$\mathcal{G}_2$. Una gráfica G pertenece a $\mathcal{G}_2$ si $G = L(H)$, donde H es una gráfica cúbica 3-conexa, cíclicamente 4-arista-conexa; o si $H = K_{3,3}$. Para $G \in \mathcal{G}_2$, cada vértice de

G está en exactamente dos triángulos. La figura 3.3 muestra un ejemplo de una gráfica en la clase $\mathcal{G}_2$.

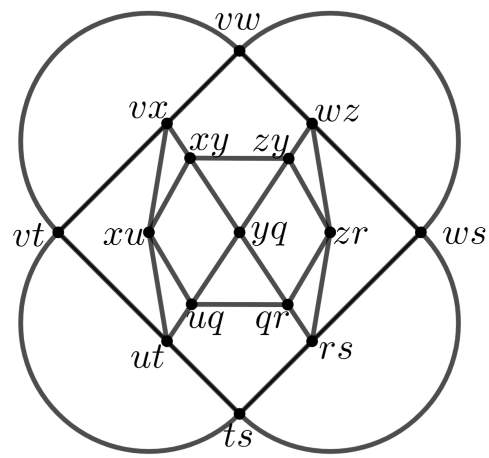


Figura 3.3: Gráfica de línea de Y_5.

La Figura 3.4 muestra al prisma pentagonal Y_5 que es una gráfica cúbica 3-conexa, cíclicamente 4-arista-conexa y la Figura 3.3 corresponde a su gráfica de línea asociada.

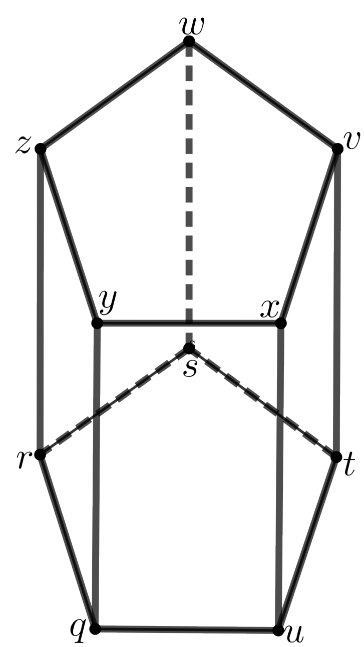


Figura 3.4: El prisma pentagonal Y_5 que es una gráfica cúbica 3-conexa, cíclicamente 4-arista-conexa.

3.2. Arista-coloración acíclica

En 1965 Vizing [22, 23] estableció la cota superior del índice cromático en términos del grado máximo y la máxima multiplicidad.

Teorema 2 (Teorema de Vizing)**.** *Para cualquier multigráfica* G, $\chi'(G) \leq \Delta(G)+\mu(G)$.

El teorema de Vizing será de utilidad para determinar el índice cromático acíclico de la familia de nuestro interés.

Recordemos que una arista-coloración acíclica de una gráfica G es una arista-coloración tal que cada uno de sus ciclos no es bicromático. El número mínimo de colores necesarios para obtener una arista-coloración acíclica es llamado índice cromático acíclico y es denotado por $a'(G)$. Fue conjeturado por Alon, Sudakov y Zaks [2] que para una gráfica simple G, $a'(G) \leq \Delta(G) + 2$.

3.3. Arista-coloraciones propias acíclicas en gráficas de $\mathcal{G}_0$

Recordemos que una gráfica G pertenece a $\mathcal{G}_0$ si contienen a K_4 y, por tanto $G = K_5$ o el conjunto de vértices $V(G)$ se puede partir en subconjuntos disjuntos de 4 vértices cada uno, tal que cada subconjunto induce un K_4, y las aristas que no pertenecen a los K_4 forman un emparejamiento perfecto de G que los conecta. Empezaremos por encontrar una 6-arista-coloración acíclica para las gráficas de esta familia. Posteriormente abordaremos una subclase donde encontraremos una 5-arista-coloración propia acíclica.

Proposición 3. *El índice cromático acíclico de* K_4 *es* 5*; es decir*

$$a'(K_4) = 5.$$

Demostración. Llamemos v_1, v_2, u_1 y u_2 a los vértices de K_4. Sin pérdida de generalidad comenzamos coloreando las aristas incidentes con v_1, tal que v_1u_1 es verde, v_1u_2 es morado y v_1v_2 es amarillo. Por lo cual la única opción para v_2u_1 es ser de color morado. Resulta que v_2u_2 es de color verde y observamos que el ciclo $v_1u_1v_2u_2$ es bicoloreado y por lo tanto no existe una 3-arista-coloración acíclica para K_4. El resultado lo podemos ver en la Figura 3.5.

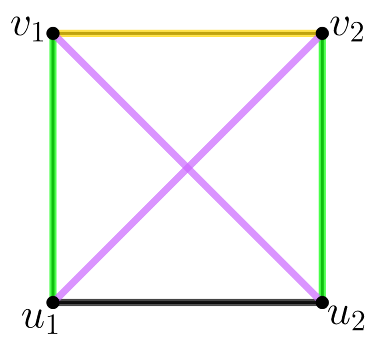
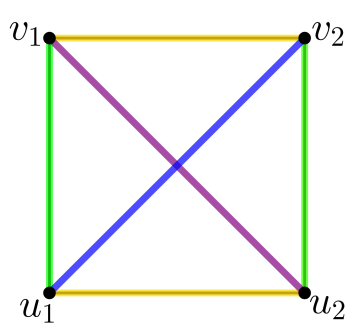


Figura 3.5: No es posible una 3−arista-coloración acíclica.

Por lo cual la arista u_1v_2 debe ser del cuarto color que en este caso es azul. Resulta que la arista v_2u_2 solo puede ser de color verde y la arista u_1u_2 solo puede ser de color amarillo y obtenemos que el ciclo $v_1v_2u_2u_1v_1$ es bicoloreado. El resultado lo podemos ver en la Figura 3.6.



PENDIENTE

Figura 3.6: No es posible una 3−arista-coloración acíclica.

Y por lo tanto no existe una 4-arista-coloración acíclica de K_4.

Procederemos a encontrar una 5-arista-coloración propia para el K_4 de la siguiente manera:

- Coloreamos las arista u_1v_2 y v_1u_2 de color morado.
- Coloreamos la arista v_1v_2 de amarillo.
- Coloreamos la arista v_2u_2 de rojo.
- Coloreamos la arista u_1u_2 de azul.
- Coloreamos la arista v_1u_1 de verde.

El resultado lo podemos ver en la Figura 3.7.

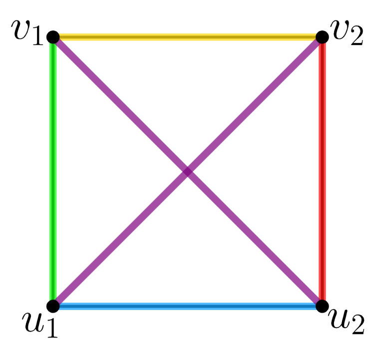


Figura 3.7: Una 5-arista-coloración propia acíclica de K_4.

□

Primeramente encontraremos una arista-coloración acíclica para una subclase de $\mathcal{G}_0$. Sea $\mathcal{G}_0^c$ la subclase de $\mathcal{G}_0$ que consiste de las gráficas que se parten en s K_4 disjuntos, digamos ${K_4}^1, ..., {K_4}^s$, denotamos a los vértices de K_4^i, $(i \in \{1, ..., s\})$ como u_{2i-1}, u_{2i}, v_{2i-1} y v_{2i} y las aristas de los emparejamientos que enlazan a los K_4 son $v_{2j}v_{2j+1}$, u_{2j} u_{2j+1}, $j = \{1, ..., s-1, s\}$, con los índices módulo $2s$. (Ver Figura 3.8)

Teorema 4. *Las gráficas de la subclase $\mathcal{G}_0^c$ tienen una 5-arista-coloración acíclica.*

Demostración. Sea G una gráfica de la subclase $\mathcal{G}_0^c$

Para obtener una 5-arista-coloración acíclica:

- Coloreamos las aristas $v_{2i-1}u_{2i}$ y $v_{2i}u_{2i-1}$ de color morado, $i = 1, \ldots, s$.

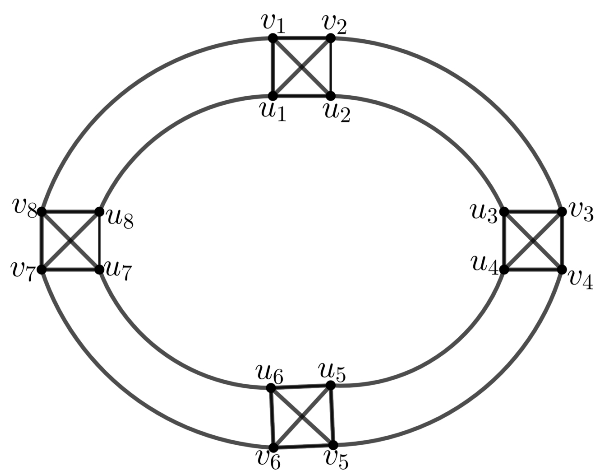


Figura 3.8: Gráfica de la subclase $\mathcal{G}_0^c$.

- Coloreamos las aristas $v_{2i-1}v_{2i}$ de color amarillo, $i = 1, \ldots, s$.
- Coloreamos las aristas $u_{2i}u_{2i+1}$ de color amarillo, $i = 1, \ldots s-1$.
- Coloreamos la arista $u_{2s}u_1$ de color naranja.
- Coloreamos las aristas $u_{2i-1}u_{2i}$ de color azul, a excepción de la arista $u_{2(s-1)}u_{2(s-1)-1}$, la cual será de color verde.
- Coloreamos las aristas $v_{2i}u_{2i}$ de color naranja, $i = 1, \ldots, s-1$ y a arista $v_{2s}u_{2s}$ de color verde.
- Coloreamos las aristas $v_{2i-1}u_{2i-1}$ de color verde, $i = 1, \ldots s-2$
- Coloreamos la arista $v_{2(s-1)-1}u_{2(s-1)-1}$ de color azul
- Coloreamos la arista $v_{2s-1}u_{2s-1}$ de color naranja.
- Coloreamos las aristas $v_{2i}v_{2i+1}$ de color azul, $i = 1, \ldots, s$, exceptuando la arista $v_{2(s-2)}v_{2(s-2)+1}$ que será de color verde.

Un ejemplo se puede observar en la Figura 3.9.

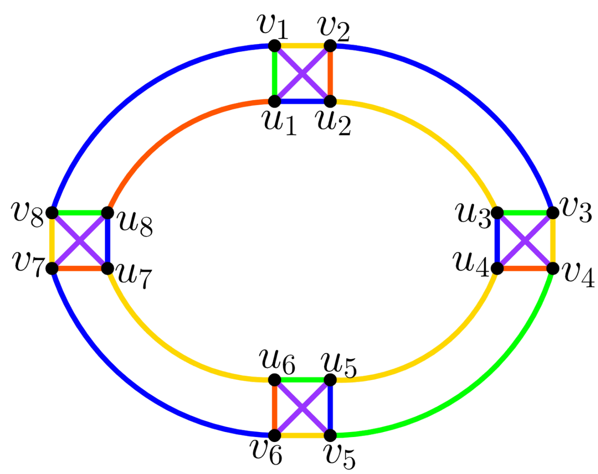


Figura 3.9: Una 5-arista-coloración acíclica en una gráfica de $\mathcal{G}_0^c$.

Por la Proposición 3, sabemos que $a'(K_4) = 5$ y como tal fueron empleados cinco colores en la arista-coloración propuesta.

Los únicos posibles ciclos bicoloreados serían aquellos que recorren varios K_4. Claramente, el ciclo «exterior» $v_1v_2\dots v_{2s}$ y el ciclo «interior» $u_1u_2\dots u_{2s}$ no son bicoloreados. Observemos que cada K_4 recibe aristas de 3 colores diferentes, en particular, hay dos aristas con el mismo color. Analicemos los posibles ciclos bicoloreados de acuerdo con el número de arista de un K_4 que emplean.

- Si el ciclo usa solo una arista de un K_4, entonces deberá entrar y salir por las aristas del mismo color que llegan a él. En este caso, tendría que ser un ciclo azul-amarillo o amarillo-verde, pero en cualquier caso, no es posible completar dicho ciclo bicoloreado.

- Si el ciclo usa dos aristas de un K_4, entrando y saliendo por dos aristas del ciclo exterior o del ciclo interior, dicho ciclo tendrá al menos tres colores. También es fácil ver que si entra por una arista del ciclo interior y sale por una del ciclo exterior, dicho ciclo tendrá al menos tres colores.

- Si el ciclo usa tres aristas de un K_4, entonces deberá usar las aristas moradas, en cuyo caso tampoco es posible completar el ciclo usando solo dos colores.

- Finalmente, notemos que el ciclo no puede utilizar cuatro o más aristas de K_4.

Por lo tanto, la arista-coloración propuesta es acíclica. □

Sea G una gráfica de la clase $\mathcal{G}_0$, que no es K_5. Enumeramos los K_4 en que se parten los vértices de G, como ${K_4}^1, ..., {K_4}^s$ y tal que los vértices de ${K_4}^i$ son v_{4i-3}, v_{4i-2}, v_{4i-1} y v_{4i}, para $i \in \{1, ..., s\}$. (Ver Figura 3.10).

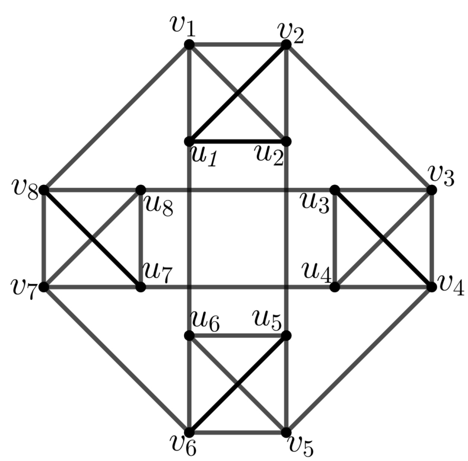


Figura 3.10: Una gráfica de la clase $\mathcal{G}_0$

Proposición 5. *Sea $G \in \mathcal{G}_0$ y G' la gráfica que resulta de contraer todas las aristas que pertenecen a cada uno de $K_4^1, \ldots, K_4^s$. Entonces G' es una gráfica 4-regular y $\mu(G') \leq 2$, excepto si $s = 2$.*

Demostración. Dado que los K_4 están conectados entre sí con un emparejamiento perfecto, al contraer las aristas de los K_4, la gráfica resultante G' es 4-regular, puesto que cada K_4 es incidente con otras 4 aristas. (Ver figura 3.11). Claramente $\mu(G') \leq 2$. Nos referiremos a los K_4^i como los vértices de G'.

Si $s = 2$, al contraer las aristas de los dos K_4, G' consistiría de dos vértices con 4 aristas entre sí. En ese caso $\mu(G') = 4$ y $\chi'(G') = 4$.

Asumamos que $s \geq 3$. Sea x_i el vértice de G' que resulta de la contracción de las aristas de K_4^i. Como consideramos que G es conexa, $\mu(G') < 4$. Si $\mu(G') = 3$, entonces existen

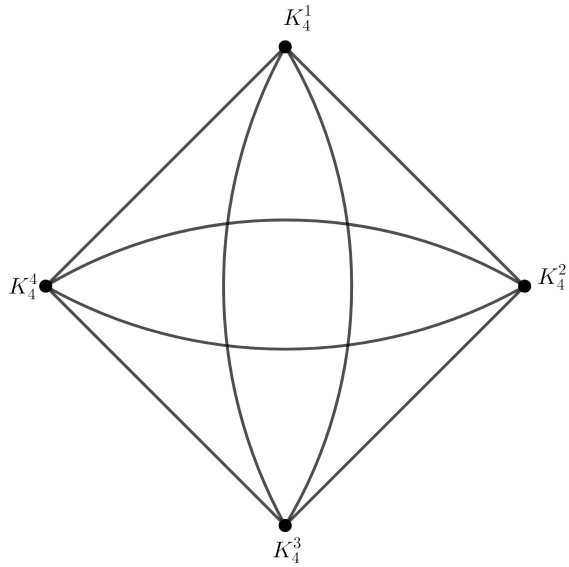


Figura 3.11: Contracción de las arista de los K_4's en los que se parte una gráfica en $\mathcal{G}_0$

dos K_4, digamos K_4^r y K_4^t, conectados por tres aristas. Como G es 4-regular, K_4^r y K_4^t son adyacentes con solo algún otro K_4, con el que cada uno comparte solamente una arista. Por lo tanto, los vértices de los K_4 con los que K_4^r y K_4^t comparten una arista son un 2-corte de G, contradiciendo que G es 4-conexa. Por lo tanto, $\mu(G') \leq 2$. □

Lema 6. *Sea $G \in \mathcal{G}_0$ y G' la gráfica que resulta de contraer todas las aristas que pertenecen a cada uno de $K_4^1, \ldots, K_4^s$. Entonces $\chi'(G') \leq 6$.*

Demostración. Como $\Delta(G') = 4$ y, por la Proposición 5, $\mu(G') \leq 2$, tenemos, del Teorema de Vizing 2, que $\chi'(G') \leq 6$. □

Teorema 7. *Sea $G \in \mathcal{G}_0$ y G' la gráfica que resulta de contraer todas las aristas que pertenecen a cada uno de $K_4^1, \ldots, K_4^s$. Entonces, una 6-arista-coloración acíclica de G' se puede extender a una 6-arista-coloración acíclica de G.*

Demostración. Por el Lema 6, la gráfica G' tiene una 6-arista-coloración, digamos con los colores $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

En la gráfica G, para los vértices de K_4^i supongamos que:

- v_{4i} es incidente con una arista de color color c_0,
- v_{4i-1} es incidente con una arista de color color c_1,
- v_{4i-2} es incidente con una arista de color color c_2, y
- v_{4i-3} es incidente con una arista de color color c_3,

donde $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y son todos distintos entre sí.

Coloreamos la arista $v_{4i}v_{4i-1}$ de color c_2, la arista $v_{4i-1}v_{4i-2}$ de color c_3, la arista v_{4i-2} v_{4i-3} de color c_0, la arista $v_{4i}v_{4i-3}$ de color c_1, y finalmente las aristas $v_{4i-1}v_{4i-3}$ y v_{4i} v_{4i-2} de color c_4, donde $c_4 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{c_0, c_1, c_2, c_3\}$. De esta manera evitamos los ciclos bicoloreados en los K_4^i, y en la gráfica G. Un ejemplo se puede ver en la Figura 3.12.

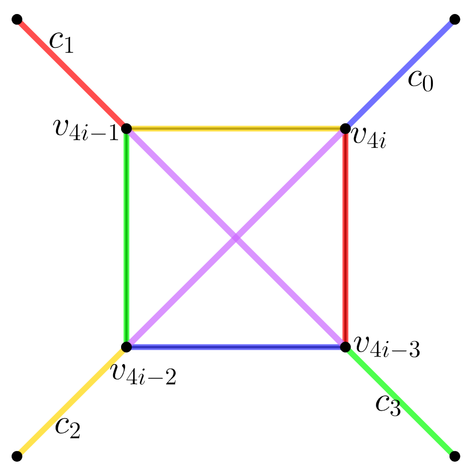


Figura 3.12: Coloración de K_4, donde c_0 = azul c_1= rojo, c_2 = amarillo, c_3 = verde y c_4 = morado.

$\square$

3.4. Arista-coloraciones propias acíclicas en gráficas de $\mathcal{G}_1$

Recordemos que la familia $\mathcal{G}_1$ corresponde a las gráficas de Harary. En particular, será conveniente la siguiente expresión para las gráficas de Harary de orden par. Para una gráfica de Harary de orden $2n$, denotamos sus vértices $(v_1, v_2, \ldots, v_n, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y las aristas corresponden a los ciclos $C_1 := v_1v_2v_3 \cdots v_nv_1$, $C_2 := u_1u_2u_3 \cdots u_nu_1$ y $C_3 := u_1v_1u_2v_2 \cdots u_nv_nu_1$.

Proposición 8. *Una gráfica de Harary par $H_{r,2n}$ no tiene una 4-arista-coloración acíclica.*

Demostración. Sea G una gráfica de Harary de orden par con vértices $u_1, u_2, \ldots, u_n$, $v_1, v_2, \ldots, v_n$.Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que las aristas incidentes con el vértice v_1, están coloreadas v_1u_1 de amarillo, v_1u_2 de azul, v_1v_2 de verde y v_1v_n de rojo, como se observa en la Figura 3.13.

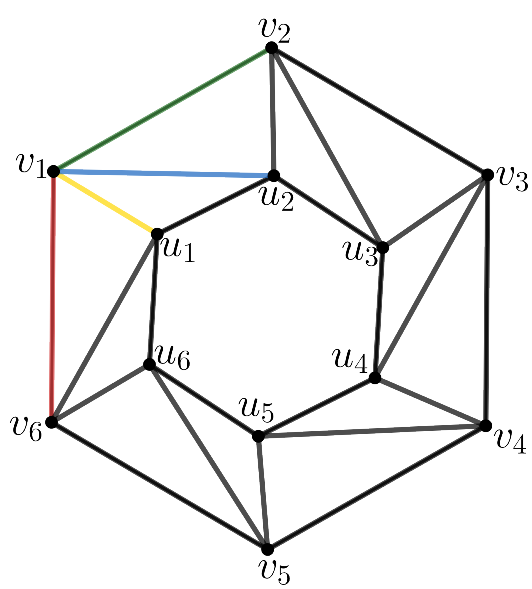


Figura 3.13: Gráfica de orden par de Harary.

La arista v_2u_2 es adyacente a la arista verde v_1v_2 y a la arista azul v_1u_2, por lo tanto hay dos opciones:

Caso 1. La arista v_2u_2 es coloreada de amarillo. (Ver Figura 3.14).

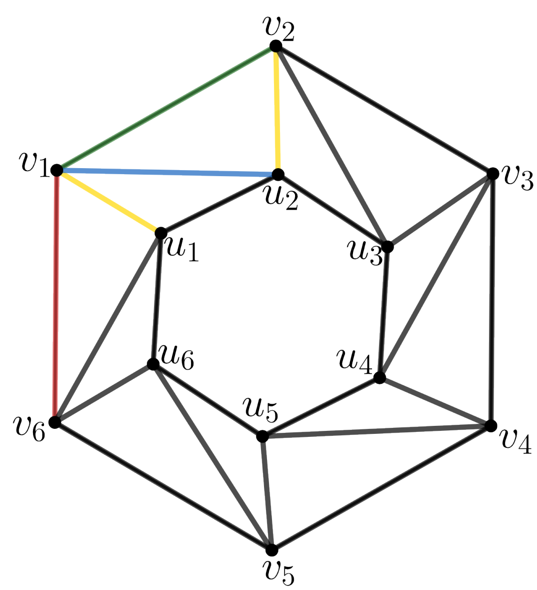


Figura 3.14: La arista v_2u_2 es coloreada de amarillo.

En este caso la arista u_1u_2 tiene 2 opciones para ser coloreada: rojo o verde. Si la arista u_1u_2 fuese verde, el ciclo $v_1v_2u_2u_1v_1$ sería 2-coloreado, por lo tanto la arista u_1u_2 deber se de color rojo. Observamos que para la arista u_2u_3 solo queda la opción del color verde, porque es adyacente a u_1u_2, v_1u_2, v_2u_2, las cuales son de color rojo, azul y amarillo, respectivamente.

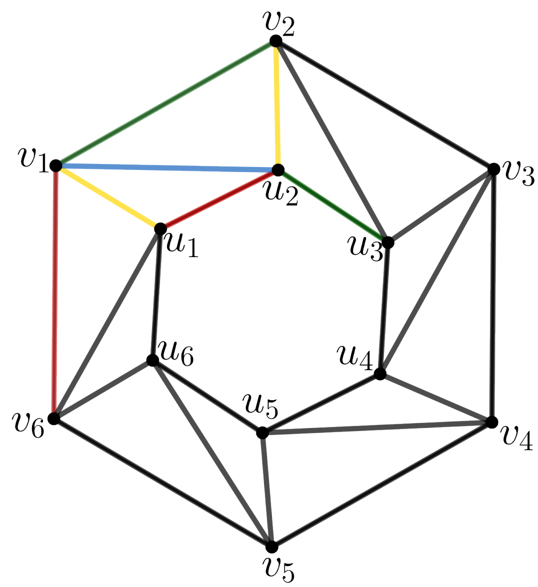


Figura 3.15: Siguiente paso en la coloración de la gráfica par de Harary.

Para la arista v_2u_3 hay dos opciones: azul o rojo. Si la arista v_2u_3 fuese azul, el ciclo $v_1v_2u_3u_2$ sería 2-coloreado, por lo tanto la única opción es que la arista v_2u_3 sea de color rojo, y, consecuentemente, la arista v_2v_3 tendría que ser de color azul.

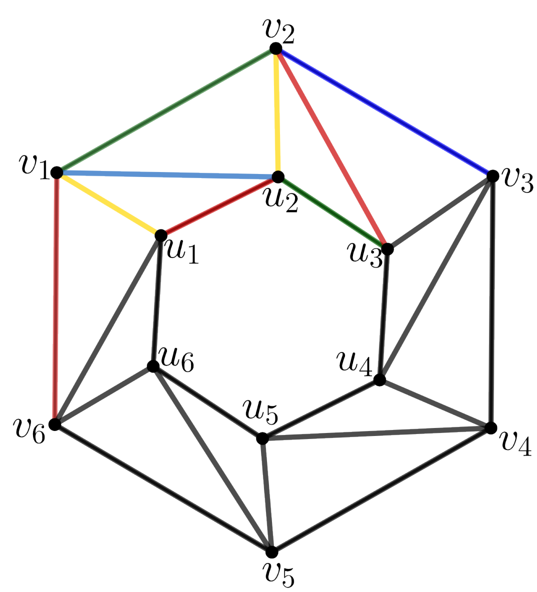


Figura 3.16: Siguiente paso de la coloración de una gráfica par de Harary.

La arista v_3u_3 solo puede ser colorada de amarillo, ya que es adyacente a u_2u_3 que es verde, a v_2u_3 que es roja y a v_2v_3 que es azul. La arista u_3u_4 solo puede ser de color azul, porque es adyacente a u_2u_3 que es verde, a v_2u_3 de color rojo y a v_3u_3 que es de color amarillo.

Para la arista v_3u_4 hay dos opciones: rojo o verde. Si v_3u_4 fuese rojo, el ciclo $v_2v_3u_4u_3$ sería 2-coloreado, por lo tanto v_3u_4 debe ser de color verde, como podemos observar en la Figura 3.17. Sin embargo, se produce el ciclo 2-coloreado $v_1v_2v_3u_4u_3u_2v_1$.

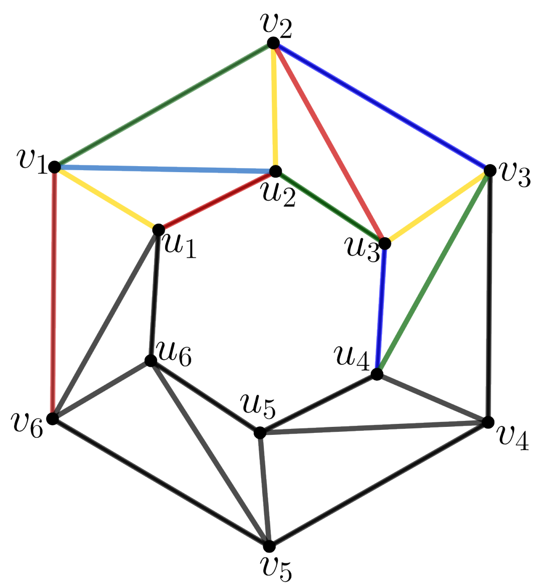


Figura 3.17: Obtención de un ciclo bicoloreado.

Caso 2. La arista v_2u_2 es coloreada de rojo, como se puede ver en la Figura 3.18.

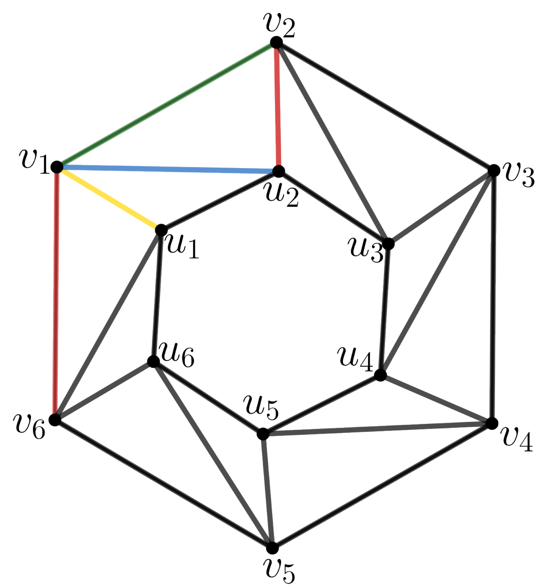


Figura 3.18: La arista v_2u_2 es coloreada de rojo.

En este caso la arista u_1u_2 solo puede ser coloreada de verde, puesto que es adyacente a la amarilla v_1u_1, a la azul v_1u_2 y a la roja v_2u_2. La arista u_2u_3 solo puede ser coloreada de amarillo ya que es adyacente a la verde u_1u_2, a ña azul v_1u_2 y a la roja v_2u_2.

La arista v_2u_3 solo puede ser de color azul, puesto que es adyacente a la amarilla u_2u_3, a la roja v_2u_2 de color rojo y a la verde v_1v_2.

La arista v_2v_3 solo puede ser de color amarillo porque es adyacente a la verde v_1v_2, a la roja v_2u_2 y a la azul v_2u_3.

Para colorear v_3u_3 hay dos posibilidades: rojo o verde. Si la arista v_3u_3 fuese rojo, el ciclo $v_2u_2u_3v_3v_2$ sería 2-coloreado, por lo tanto la única opción es que v_3u_3 sea de color verde. Sin embargo, notamos que el ciclo $v_1v_2v_3u_3u_2u_1$ es 2-coloreado, como se puede ver en la Figura 3.19.

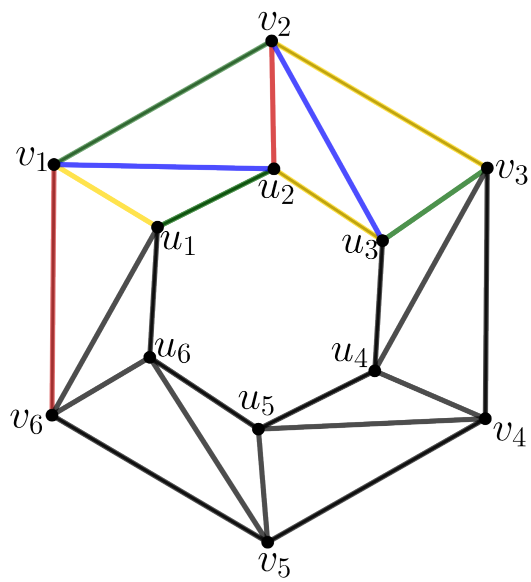


Figura 3.19: Obtención de un ciclo bicoloreado.

Entonces, podemos concluir que producir una 4-arista-coloración acíclica no es factible.

□

Teorema 9. *El índice cromático acíclico de las gráficas de Harary de orden par $2n$, con $n \geq 4$, es 5.*

Demostración. Las gráficas de Harary de orden par $2n$ tienen una descomposición en tres ciclos, a los que denominaremos $C_1 = v_1v_2 \cdots v_n$, $C_2 = u_1u_2 \cdots u_n$ y $C_3 = u_1v_1u_2v_2 \cdots u_nv_n$.

- Para las aristas del ciclo C_1, la arista v_1v_2 será de color morado, y las demás aristas serán coloreadas de manera alternante amarillo y azul; de manera que v_2v_3 es amarilla, v_3v_4 es azul, v_4v_5 es amarilla, y así sucesivamente hasta la arista v_nv_1.
- Para las aristas del ciclo C_2, la arista u_1u_2 será de color morado, y las demás aristas serán coloreadas de manera alternante amarillo y azul; de manera que

u_2u_3 es amarilla, u_3u_4 es azul, u_4u_5 es amarilla, y así sucesivamente hasta la arista u_nu_1. (Ver la Figura 3.20).

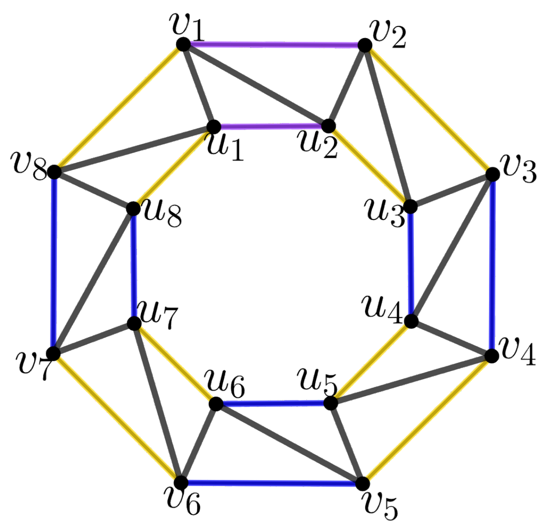


Figura 3.20: Ciclo C_1 y C_2 coloreados.

- Para las aristas del ciclo C_3, la arista v_1u_1 debe ser del mismo color que u_3u_4, en este caso, de color azul. Coloreamos v_1u_2 de rojo, u_2v_2 de verde, y v_2u_3 de rojo, u_3v_3 será morado, v_3u_4 verde, u_4v_4 rojo, v_4u_5 morado, y así sucesivamente, como se puede observar en la Figura 3.21

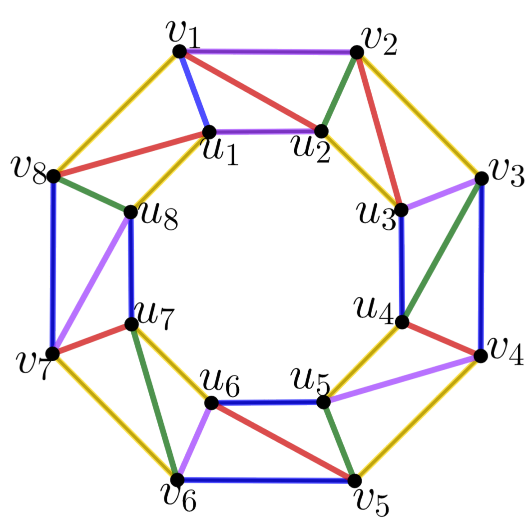


Figura 3.21: Arista-coloración acíclica.

En nuestra coloración es fácil ver que los ciclos C_1, C_2 y C_3 no son bicoloreados, puesto que precisamente se eligieron 3 colores para cada uno de ellos. Observamos que un ciclo que alterna entre aristas de C_1 y C_2 utiliza al menos dos aristas de C_3 y por lo tanto tiene por lo menos 3 colores. □

Proposición 10. *Una gráfica de Harary impar $H_{r,n}$ no tiene una 4-arista-coloración acíclica.*

Demostración. Sea G una gráfica de Harary de orden impar con vértices $v_1, v_2, \ldots, v_{2n+1}$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que las aristas incidentes con el vértice v_1, están coloreadas v_1v_2 de amarillo, v_1v_{2n+1} de morado, v_1v_{2n} de verde y v_1v_3 de rojo, como se observa en la Figura 3.22.

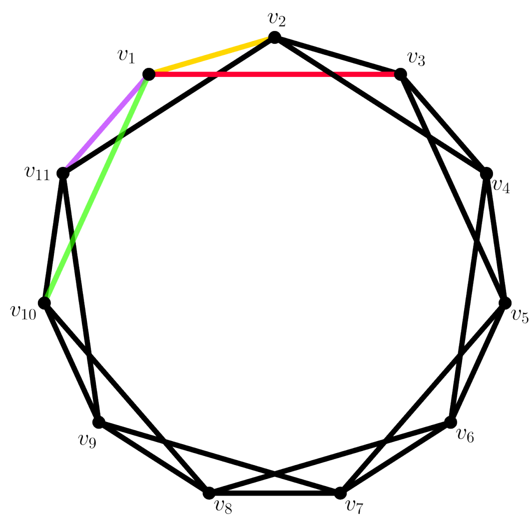


Figura 3.22: Coloración de gráfica impar de Harary.

Entonces, para $v_{2n+1}v_2$ hay dos opciones:

- $v_{2n+1}v_2$ es verde.
- $v_{2n+1}v_2$ es roja.

Supongamos que $v_{2n+1}v_2$ es verde, en consecuencia v_2v_3 debe ser morada, v_2v_4 es roja, v_3v_4 es verde (si fuese amarilla el ciclo $v_1v_2v_4v_3v_1$ sería bicoloreado), v_3v_5 es amarilla, v_4v_5 es morada, v_4v_6 es amarilla v_5v_6 es roja (si fuese verde el ciclo $v_3v_4v_6v_5v_3$ sería bicoloreado), v_5v_7 es verde, por lo tanto, v_6v_7 es morada. Continuando de esta manera, podemos observar que las aristas $v_{2i}v_{2i+1}$ son moradas, en particular $v_{2n+2}v_{2n+3} = v_1v_2$ es morada, lo que contradice que era de color amarillo.

Podemos ver un ejemplo en la Figura 3.23.

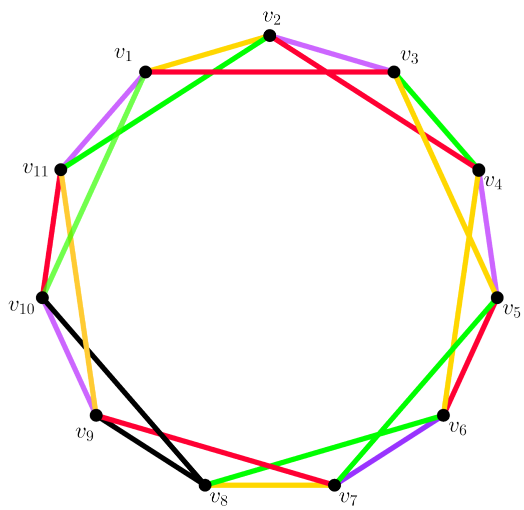


Figura 3.23: Ejemplo de coloración de gráfica impar de Harary.

Supongamos que $v_{2n+1}v_2$ es roja, v_2v_3 debe ser verde (si fuese morada, el ciclo $v_1v_3v_2v_{2n+1}v_1$ sería bicoloreado), v_2v_4 debe ser morada, v_3v_4 debe ser amarilla, v_3v_5 debe ser morada, v_4v_5 es roja (si fuese verde el ciclo $v_2v_4v_5v_3v_2$ sería bicoloreado), v_4v_6 es verde, v_4v_6 es amarilla, Continuando de esta manera, podemos observar que las aristas $v_{2i-1}v_{2i}$ son amarillas, en particular $v_{2n+1}v_1$ es amarilla, lo que contradice que $v_{2n+1}v_1$ era de color morado. Podemos ver un ejemplo en la Figura 3.24.

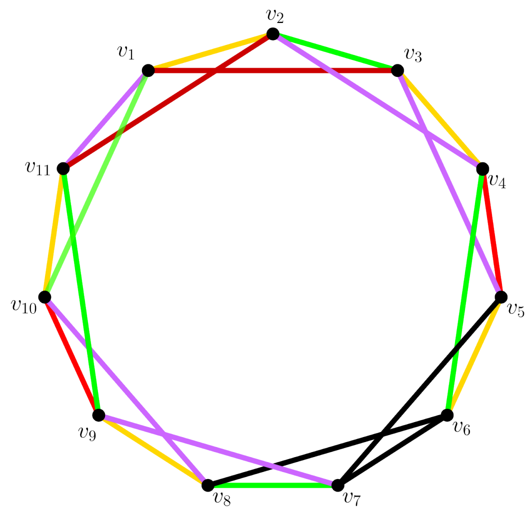


Figura 3.24: Ejemplo de arista-coloración acíclica en una gráfica de Harary de orden impar.

Por lo tanto no existe una 4−arista coloración acíclica. □

Teorema 11. *Las gráficas de Harary $H_{4,2n+1}$ de orden impar, tienen una 5-arista-coloración acíclica.*

Demostración. Primeramente descomponemos la gráfica de Harary de orden impar G en dos ciclos impares (Ver Figura 3.25).

1. C_1 definido por $v_1v_2v_3\cdots v_{2n}v_{2n+1}v_1$, y
2. C_2 definido por $v_1v_3v_5\cdots v_{2n-1}v_{2n+1}v_2v_4\cdots v_{2n}v_1$.

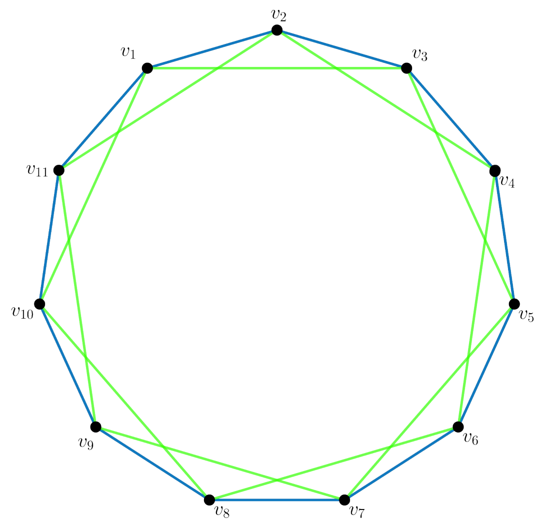


Figura 3.25: Descomposición de $H_{4,2n+1}$ en los ciclos impares C_1 en azul y C_2 en verde.

Consideraremos dos casos: $2n+1 \equiv 1 \pmod 4$ y $2n+1 \equiv 3 \pmod 4$.

Caso 1. $2n+1 \equiv 1 \pmod 4$.

Empezaremos por colorear el ciclo C_2. La arista v_1v_3 es de color verde. Las aristas restantes de C_2 se colorean de manera alternante con azul y rojo; es decir, la arista v_3v_5 será azul, la arista v_5v_7 rojo, la arista v_7v_9 será azul y así hasta completar el ciclo. Claramente, este ciclo tiene 3 colores.

Para el ciclo C_1, primero coloreamos todas las aristas que sean adyacentes a la arista de v_1v_3 de tal manera que la arista v_1v_2 será de color morado, la arista $v_{2n+1}v_1$ de color amarillo, la arista v_2v_3 será de color amarillo, v_3v_4 será de color morado y las aristas $v_{2n}v_{2n+1}$ y v_4v_5 serán de color verde. Luego, las aristas $v_5v_6, v_7v_8, v_9v_{10}, \ldots, v_{2n-1}v_{2n}$ son de color amarillo. De las $n-3$ restantes, coloreamos $v_6v_7, v_{10}v_{11}, \ldots, v_{2n-2}v_{2n-1}$ de morado; $v_8v_9, v_{12}v_{13}, \ldots v_{2n-4}v_{2n-3}$ de verde. Un ejemplo de este caso lo podemos observar en la Figura 3.26.

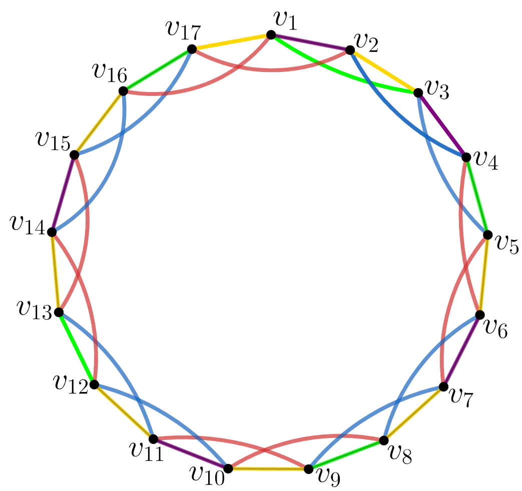


Figura 3.26: Ejemplo de arista-coloración acíclica en una gráfica de Harary de orden impar.

Caso 2. $n \equiv 3 \pmod 4$.

Empezaremos por colorear el ciclo C_2. La arista v_2v_4 es verde. Las aristas restantes de C_2 se colorean de manera alternante con azul y rojo, es decir, la arista v_4v_6 será azul, la arista v_6v_8 rojo, la arista v_8v_{10} será azul y así hasta completar el ciclo. Claramente, este ciclo tiene 3 colores.

Para el ciclo C_1 primero coloreamos todas las aristas que sean adyacentes a v_2v_4 de tal manera que la arista v_1v_2 es amarilla, v_2v_3 es morada, la arista v_3v_4 será de color amarillo, v_4v_5 será de color morado. La arista $v_{2n+1}v_1$ será morada, v_5v_6 será amarilla, después las aristas $v_{2n}v_{2n+1}$ y v_6v_7 serán de color verde.

Luego, las aristas $v_7v_8, v_9v_{10}, v_{11}v_{12} \dots v_{2n-1}v_{2n}$ son de color amarillo. De las $n-4$ restantes, coloreamos $v_8v_9, v_{12}v_{13}, \dots v_{2n-2}v_{2n-1}$ de color morado; $v_{10}v_{11}, v_{14}v_{15}, \dots, v_{2n-4}v_{2n-3}$ de verde. Un ejemplo de este caso lo podemos observar en la Figura 3.27.

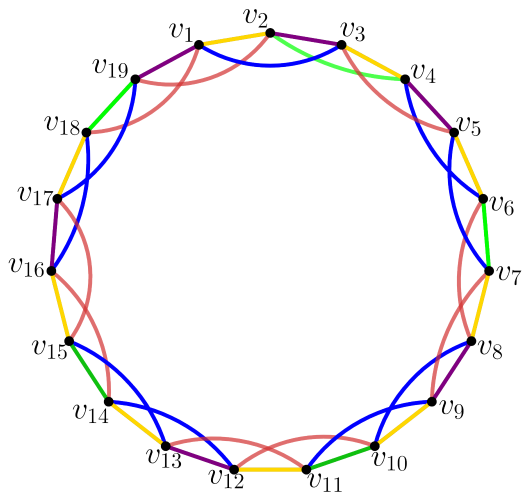


Figura 3.27: Ejemplo 5-arista-coloración propia acíclica en gráfica de $\mathcal{G}_1$

Hemos encontrado una 5-arista-coloración propia acíclica,

No hay ciclos bicoloreados por construcción. Claramente los ciclos C_1 y C_2 no son bicoloreados. Cualquier ciclo que utilice aristas tanto de C_1 como de C_2, en particular utilizará una arista de C_1, digamos morada, por lo cual utilizará todas las moradas, que se encuentran de forma alternante en C_1 (sabemos que éstas están separadas por una arista de otro color) hasta completar un ciclo, pero no puede completarse para ser bicoloreado porque C_1 es impar.

□

3.5. Arista-coloraciones propias acíclicas en gráficas de $\mathcal{G}_2$

Proposición 12. *La gráfica de línea de $K_{3,3}$ no tiene una 4-arista coloración acíclica.*

Demostración. Debido a que la gráfica es vértice transitiva, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que las aristas incidentes con el vértice wy, están coloreadas $wy\,vy$ de amarillo, $wy\,uy$ de rojo, $wy\,wz$ de verde y $wy\,wx$ de morado, como se observa en la Figura 3.28.

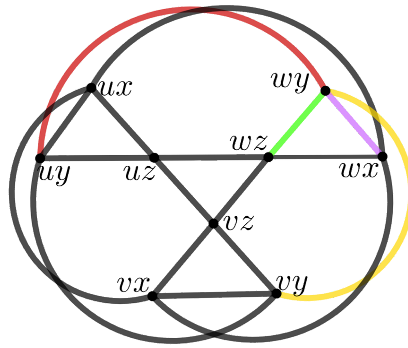


Figura 3.28: Coloración de la gráfica de línea de $K_{3,3}$.

Obtenemos dos casos: $wzwx$ es de color roja o de color amarilla.

Caso 1. $wz\,wx$ es roja.

entonces, $uz\,wz$ tiene dos opciones: $uz\,wz$ es amarilla, o $uz\,wz$ es morada.

1.1 $uz\,wz$ es amarilla.

Luego, $vz\,wz$ debe ser morada. Entonces, $vz\,uz$ tiene dos opciones: $vz\,uz$ es verde, o $vz\,uz$ es roja.

1.1.1 $vz\,uz$ es verde.

Luego, $uy\,uz$ debe ser morada, $vz\,vy$ debe ser roja. Entonces, $ux\,uz$ debe ser roja, $vx\,vz$ debe ser amarilla. Por lo tanto, $vx\,wx$ debe ser verde, pero $ux\,wx$ también debe ser de color verde puesto que si fuese amarilla, el ciclo $ux\,wx\,wz\,uz\,ux$ sería bicoloreado, como se puede observar en la Figura 3.29.

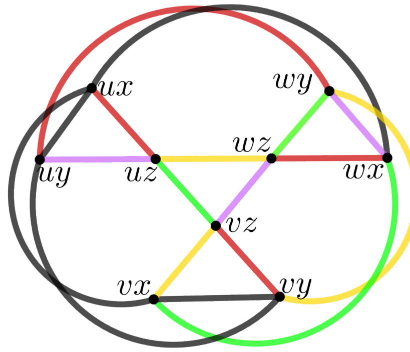


Figura 3.29: Coloración de la gráfica de línea cuando la arista $uz\,wz$ es amarilla.

1.1.2 $vz\,uz$ es roja.

Luego, $vz\,vy$ debe ser verde. Entonces, $vx\,vz$ es amarilla. Después $uy\,uz$ debe ser verde, puesto que si fuese morada, el ciclo $uz\,uy\,wy\,wx\,wz\,vz\,uz$ sería bicoloreado. Por lo tanto $ux\,uz$ debe ser morada, resulta que $ux\,wx$ debe ser verde, así mismo, $vx\,wx$ debe ser verde, entonces no se puede colorear, como se puede observar en la Figura 3.30.

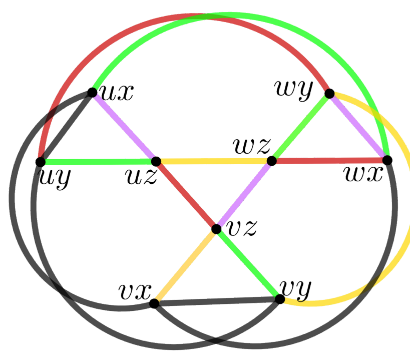


Figura 3.30: Coloración de la gráfica de línea cuando la arista $vz\,uz$ es roja.

1.2 $uz\,wz$ es morada.

Luego, $vz\,wz$ debe ser amarilla, pero $vz\,uz$ tiene dos opciones: $vz\,uz$ es verde o $vz\,uz$ es roja.

1.2.1 $vz\,uz$ es verde.

Luego, $uy\,uz$ debe ser amarilla. Entonces, $ux\,uz$ debe ser roja. En consecuencia, $ux\,uy$ debe ser verde, si fuese morada, el ciclo $uy\,ux\,uz\,wz\,wx\,wy\,uy$ sería bicoloreado. Por lo cual, $ux\,wx$ debe ser amarilla. Resulta que $wx\,vx$ debe ser verde y $uy\,vy$ debe ser morada. Observamos que $vx\,vz$ y $vx\,vy$ deben ser de color rojo, por lo cual no se pueden colorear, como se puede observar en la Figura 3.31.

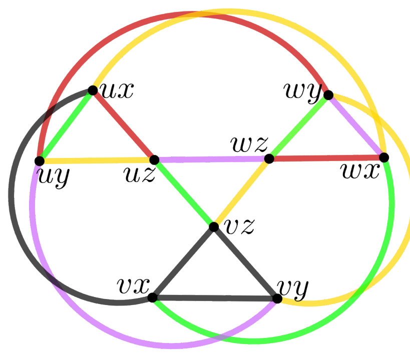


Figura 3.31: Gráfica de línea con aristas que no se pueden colorear.

1.2.2 $vz\,uz$ es roja.

Luego, $vz\,vy$ debe ser morada, si fuese verde, el ciclo $vz\,wz\,wy\,vy\,vz$ sería bicoloreado. Entonces, $vz\,vx$ debe ser verde, y también $uy\,vy$ debe ser verde. Resulta que $uy\,uz$ debe ser amarilla y $vx\,vy$ debe ser roja. Por lo cual $vx\,wx$ debe ser amarilla y $ux\,uz$ debe ser verde. Observamos que $ux\,wx$ al igual que $vx\,wx$ no se pueden colorear, como se puede observar en la Figura 3.32.

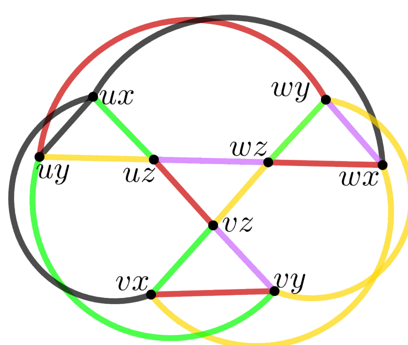


Figura 3.32: Caso cuando $vz\,uz$ es roja.

Caso 2. $wz\,wx$ es amarilla.

Por simetría, la demostración para este caso es análoga al caso 1, intercambiando el color rojo por amarillo de las aristas $uy\,wy$ y $vy\,wy$. □

Teorema 13. *La gráfica de línea* $(K_{3,3})$ *tiene una 5-arista coloración acíclica.*

Demostración. Consideremos $K_{3,3}$ con bipartición de vértices $\{\{u,v,w\},\{x,y,x\}\}$ y construimos la gráfica de línea $L(K_{3,3})$. (Ver figura 3.33).

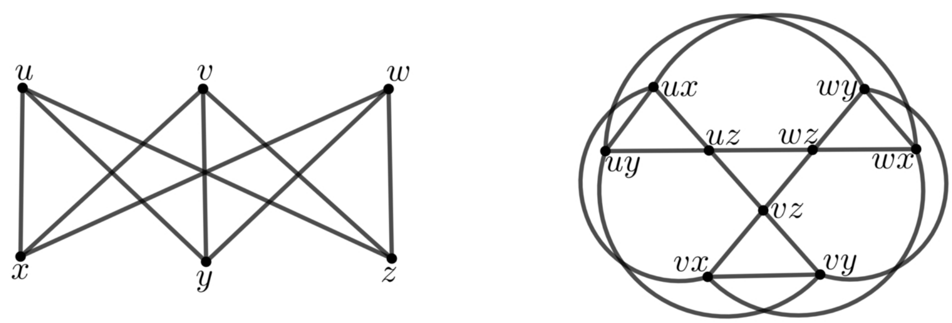


Figura 3.33: A la izquierda la gráfica $K_{3,3}$, y a la derecha su gráfica de línea $L(K_{3,3})$.

Coloreamos:

1. De color rojo las aristas $uy\,wy$, $ux\,wx$, $uz\,wz$ y $vz\,vy$.
2. De color verde las aristas $wy\,wz$, $vx\,vz$ y $uy\,vy$.
3. De color azul las aristas $ux\,uy$, $wx\,wz$, $vx\,vy$ y $uz\,vz$.
4. De color amarillo las aristas $wx\,wy$, $vz\,wz$, $uz\,uy$ y $vx\,ux$.
5. De color morado las aristas $ux\,uz$, $vy\,wy$ y $vx\,wx$

En la figura 3.34 podemos verificar fácilmente que la 5-arista-coloración es acíclica.

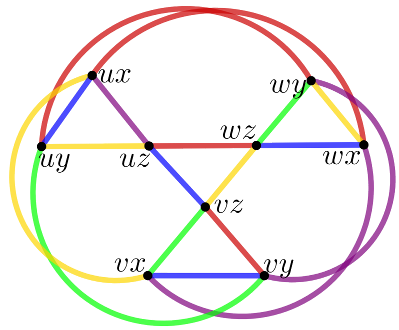


Figura 3.34: Una 5-arista-coloración acíclica en la gráfica $L(K_{3,3})$.

□

Para finalizar, daremos una coloración para la gráfica línea del prisma pentagonal. Ver Figura 3.35.

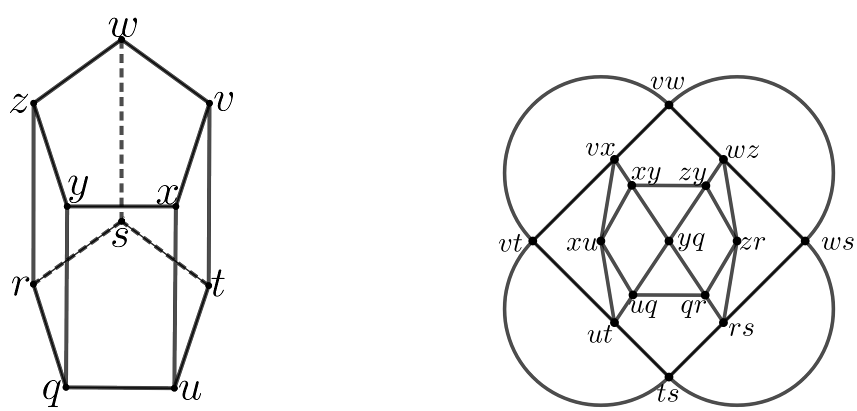


Figura 3.35: La gráfica Y_5 a la izquierda y a la derecha su gráfica de línea.

Teorema 14. *La gráfica de línea de Y_5 (prisma pentagonal) tiene una 5-arista-coloración acíclica.*

Demostración. Coloreamos:

1. De color rojo las aristas $vt\,vw$, $vx\,xu$, $yq\,qr$, $xy\,zy$, $ut\,uq$, $zr\,rs$ y $ts\,ws$.

2. De color verde las aristas $vx\,vw$, $wz\,ws$, $zy\,zr$, $xy\,yq$, $xu\,ut$ y $ts\,rs$.

3. De color azul las aristas $vw\,ws$, $wz\,zr$, $qr\,rs$, $uq\,yq$, $vt\,vx$, $ut\,ts$ y $vt\,vx$.

4. De color amarillo las aristas $vt\,ut$, $uq\,qr$, $rs\,ws$, $yq\,zy$ y $vw\,wz$.

5. De color morado las aristas $vt\,ts$, $xu\,uq$, $zy\,wz$, $vx\,xy$ y $qr\,zr$.

En la figura 3.36 podemos verificar fácilmente que la 5-arista-coloración es acíclica.

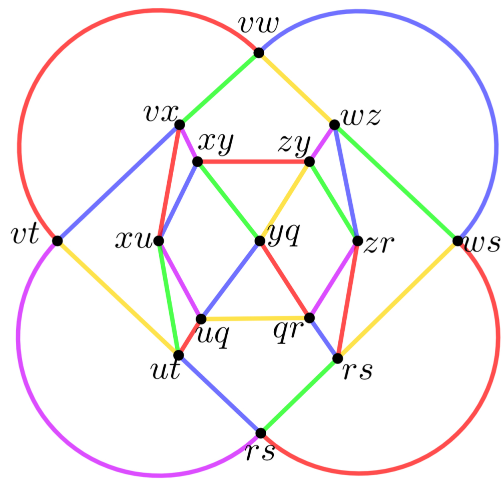


Figura 3.36: Una 5-arista-coloración acíclica en la gráfica $L(Y_5)$.

$\square$

Bibliografía

[1] Noga Alon, Colin McDiarmid, and Bruce Reed. Acyclic coloring of graphs. *Random Structures Algorithms*, 2(3):277–288, 1991.

[2] Noga Alon, Benny Sudakov, and Ayal Zaks. Acyclic edge colorings of graphs. *J. Graph Theory*, 37(3):157–167, 2001.

[3] Manu Basavaraju and L. Sunil Chandran. Acyclic edge coloring of graphs with maximum degree 4. *J. Graph Theory*, 61(3):192–209, 2009.

[4] Meriem Bensouyed, Nousseiba Guidoum, and Djamel Eddine Saidouni. Strict strong graph coloring: Algorithms and applications. 09 2015.

[5] Yuriy Brun. The four color theorem. *MIT UJM*, pages 21–28, May 2002.

[6] Louis Esperet and Aline Parreau. Acyclic edge-coloring using entropy compression. *European J. Combin.*, 34(6):1019–1027, 2013.

[7] Iosif Fiamčík. The acyclic chromatic class of a graph. *Math. Slovaca*, 28(2):139–145, 1978.

[8] Jerzy A. Filar, Michael Haythorpe, and Richard Taylor. Linearly-growing reductions of karp's 21 np-complete problems. *Numer. Algebra Control Optim.*, 8(1):1–16, 2018.

[9] Trevor J. Gionet, Jr., Erika L. C. King, and Yixiao Sha. A revision and extension of results on 4-regular, 4-connected, claw-free graphs. *Discrete Appl. Math.*, 159(12):1225–1230, 2011.

[10] Ioannis Giotis, Lefteris Kirousis, Kostas I. Psaromiligkos, and Dimitrios M. Thilikos. Acyclic edge coloring through the Lovász local lemma. *Theoret. Comput. Sci.*, 665:40–50, 2017.

[11] Mate Glaurdić, Jelena Beban-Brkić, and Dražen Tutić. Graph colouring and its application within cartography. *KoG*, 20:99–114, 2016.

[12] Ian Holyer. The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM J. Comput.*, 10(4):718–720, 1981.

[13] Daniel Johnston. *Edge Colorings of Graphs and Their Applications*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2015. Thesis (Ph.D.)–Western Michigan University.

[14] Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of computer computations (Proc. Sympos., IBM Thomas J. Watson Res. Center, Yorktown Heights, N.Y., 1972)*, pages 85–103, 1972.

[15] Henry A. Kierstead and James H. Schmerl. Some applications of Vizing's theorem to vertex colorings of graphs. *Discrete Math.*, 45(2-3):277–285, 1983.

[16] Michael Molloy and Bruce Reed. Further algorithmic aspects of the local lemma. In *STOC '98 (Dallas, TX)*, pages 524–529. ACM, New York, 1999.

[17] Sokol Ndreca, Aldo Procacci, and Benedetto Scoppola. Improved bounds on coloring of graphs. *European J. Combin.*, 33(4):592–609, 2012.

[18] Michael D. Plummer. A note on Hamilton cycles in claw-free graphs. In *Proceedings of the Twenty-fourth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Boca Raton, FL, 1993)*, volume 96, pages 113–122, 1993.

[19] Michael D. Plummer. 2-extendability in two classes of claw-free graphs. In *Graph theory, combinatorics, and algorithms, Vol. 1, 2 (Kalamazoo, MI, 1992)*, Wiley-Intersci. Publ., pages 905–922. Wiley, New York, 1995.

[20] Claude E. Shannon. A theorem on coloring the lines of a network. *J. Math. Physics*, 28:148–151, 1949.

[21] Qiaojun Shu, Yiqiao Wang, Yulai Ma, and Weifan Wang. Acyclic edge coloring of 4-regular graphs without 3-cycles. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 42(1):285–296, 2019.

[22] V. G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz*, (3):25–30, 1964.

[23] V. G. Vizing. The chromatic class of a multigraph. *Kibernetika (Kiev)*, 1965(3):29–39, 1965.

[24] Juan Wang, Lianying Miao, Wenyao Song, and Yunlong Liu. Acyclic coloring of graphs with maximum degree 7. *Graphs and Combinatorics*, 37(2):455–469, 2021.

[25] Weifan Wang, Yulai Ma, Qiaojun Shu, and Yiqiao Wang. Acyclic Edge Coloring of 4-Regular Graphs (II). *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 42(5):2047–2054, 2019.