UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

FACULTAD DE CIENCIAS

"SOLUCIONES AXIOMÁTICAS PARA PROBLEMAS DE DECISIÓN MULTIAGENTE"

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN CIENCIAS APLICADAS

PRESENTA:

LUZ EDITH SANTOS GUERRERO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. WILLIAM JOSÉ OLVERA LÓPEZ

SAN LUIS POTOSÍ, SLP NOVIEMBRE 2021

TESIS DE MAESTRÍA

“SOLUCIONES AXIOMÁTICAS PARA PROBLEMAS DE DECISIÓN MULTIAGENTE”

ALUMNA

LUZ EDITH SANTOS GUERRERO

COMITÉ QUE ACEPTA LA TESIS

Dr. William José Olvera López	Asesor	____________________
Dr. César Israel Hernández Vélez	Sinodal	____________________
Dr. Joss Erick Sánchez Pérez	Sinodal	____________________
Dr. Iván Téllez Téllez	Sinodal	____________________

NOVIEMBRE 2021

DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD DE LA TESIS

Yo, Luz Edith Santos Guerrero, estudiante del Posgrado en Ciencias Aplicadas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, como autora de la tesis “Soluciones Axiomáticas para Problemas de Decisión Multiagente”, declaro que la tesis es una obra original, inédita, auténtica, personal, que se han citado las fuentes correspondientes y que en su ejecución se respetaron las disposiciones legales vigentes que protegen los derechos de autor y de propiedad intelectual e industrial. Las ideas, doctrinas, resultados y conclusiones a los que he llegado son de mi absoluta responsabilidad.

Resumen

Existen múltiples situaciones donde un grupo de agentes (individuos, empresas, entidades, proyectos, estados, etc.) debe ponerse de acuerdo para tomar decisiones. Esta clase de problemas se denominan problemas de decisión multiagente. En el presente proyecto, se busca estudiar un caso particular de esta clase de situaciones, donde los agentes tienen un conjunto finito de opciones, pero sólo pueden elegir una de ellas. Cada decisión le otorga una utilidad diferente a cada agente y, por tanto, cada agente preferirá la opción que le genere un mayor beneficio. En este escrito, se proponen soluciones a esta clase de situaciones, abordando el problema desde el punto de vista de la teoría de juegos cooperativos. Se plantean soluciones y se dan propiedades de las mismas.

Abstract

There exist multiple situations where a group of agents (individuals, companies, entities, projects, states, etc.) must agree to make decisions. This kind of problems are called multi-agent decision problems. In this project, we study a particular case of this kind of situations, where agents have a finite set of options, but can only choose one of them. Each decision gives a different utility to each agent and, therefore, each agent will prefer the option that generates the highest profit. In this paper, we propose solutions to this kind of situations, approaching the problem from the point of view of Cooperative Game Theory. Solutions are proposed and some properties are given.

Agradecimientos

Primeramente, le agradezco a Dios y a la vida por permitirme haber llegado hasta aquí y por haberme dado la oportunidad de vivir la gratificante experiencia de vivir y estudiar en este increíble país que es México y lo más importante, al lado de mi amada hija Mariana.

Agradezco a mi asesor de tesis, el Dr. William José Olvera López, por compartirme sus conocimientos, por todo su tiempo, dedicación, constancia y paciencia para culminar con éxito este trabajo de tesis. Es un excelente maestro, asesor y persona. Gracias por todas sus enseñanzas.

Agradezco también a mis maestros, Dr. Joss Erick Sánchez Pérez, Dr. Iván Téllez Téllez y Dr. César Israel Hernández Vélez, por sus valiosas enseñanzas, aportaciones, sugerencias y observaciones que permitieron mejorar este escrito.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo financiero brindado, con el cual pudimos estudiar, prepararnos y vivir tranquilamente junto con mi hija durante estos dos años.

Agradezco a todos mis maestros del posgrado por transmitirnos sus conocimientos y hacer de nosotros mejores profesionales y mejores personas.

Agradezco a todos mis compañeros del posgrado con los que llegué a compartir alguna clase, gracias por su amistad, por las explicaciones, por el mutuo apoyo en trabajos y tareas y sobre todo, por el apoyo emocional que me brindaron. Realmente me hicieron sentir aceptada en este país.

Agradezco enormemente a toda mi familia por todos los esfuerzos que han hecho para que mi hija y yo pudiéramos estar aquí. Gracias a mi hermano Ferney por el tiempo que nos acompañó. Gracias a todos por sus oraciones, la paciencia, el amor y el apoyo que nos brindan desde la distancia. Este triunfo no es sólo mío, es un triunfo familiar. ¡Los amo a todos!

Agradezco a la vida por todas las personas maravillosas que puso en nuestro camino y que hicieron que nuestra estadía es este lugar fuera tan placentera. A mi amiga Lucía, su hijo Leonardo y toda su familia, a mi amiga Rosy y toda su familia y a todos aquellos que de alguna manera nos aceptaron y compartieron tiempo con nosotras. Gracias por todos los momentos compartidos y todo el apoyo que nos brindaron. Nos vamos con los mejores recuerdos de nuestros amigos mexicanos. Cada uno tiene un espacio en nuestro corazón. ¡Qué gusto haberlos conocido!

Agradezco a mis maestros y amigos colombianos, Dr. Alexander Arredondo y Dr. Camilo Ramírez, por sus consejos, enseñanzas, por creer en mis capacidades y animarme a realizar esta maestría.

Agradezco a Carlos Díez, decano de la FUKL, por su confianza en mí y por incentivarme a continuar con mis estudios.

Agradezco a mi profesor Vladimir Ballesteros por creer en mis capacidades, sus buenos consejos y dirigirme hacia el mágico mundo de las matemáticas.

Agradezco a mis amigos, compañeros, colegas y compatriotas, Alejandra Torres y Ricardo Cano, quienes al igual que yo, vinieron a este país en busca de mejores oportunidades. Gracias por su apoyo, amistad y por todos los momentos compartidos.

Agradezco a todos mis familiares, amigos y conocidos que de una u otra manera me apoyaron, enviándome su buena energía y me motivaron con sus buenos deseos.

Finalmente, agradezco al amor de mi vida, mi hija Mariana, por ser mi polo a tierra, por ser mi norte, por ser mi compañera en esta experiencia, por su paciencia, comprensión y amor, y porque cada día hace que yo sea una mejor persona.

¡Muchas gracias a todos!

Dedicado a las ocho personas más importantes en mi vida,
quienes siempre me brindan su apoyo incondicional,
mi familia.

"Las Matemáticas son el lenguaje
con el que Dios ha escrito el universo".
– Galileo Galilei.

Índice general

Índice de tablas

Introducción

La teoría de juegos es una rama de las matemáticas que estudia el comportamiento de un grupo de agentes o jugadores tomando decisiones. Dentro de ella podemos encontrar la teoría de juegos no cooperativos y la teoría de juegos cooperativos. En la primera, los agentes compiten entre ellos en busca de maximizar su beneficio individual, mientras en la segunda, los agentes se unen para buscar un beneficio colectivo. Es una teoría relativamente nueva que ha tenido un gran auge en las últimas décadas. Sus inicios se remontan a la década de los años 40 cuando el matemático John von Neumann y el economista Oskar Morgenstern sentaron las bases de la teoría de juegos en su libro pionero "*Game Theory and Economic Behavior*", publicado en 1944 por la editorial "Princeton University Press". Desde entonces han surgido otros investigadores que han revolucionado la teoría de juegos como, por ejemplo; John Forbes Nash (considerado el padre de la teoría de juegos), John Harsanyi y Reinhard Selten quienes recibieron el Premio Nobel de Economía por su papel pionero en los análisis de los equilibrios en el marco de la teoría de juegos no cooperativos. Más adelante, también podemos encontrar a otro grande, no sólo de la teoría matemática sino también de la teoría económica, a Lloyd Shapley, quien fue galardonado con el Premio Nobel de Economía junto a Alvin Roth por sus aportaciones a la teoría de juegos cooperativos en su trabajo sobre asignaciones estables y sus teorías de rediseño de mercados económicos. A él también se le atribuye el denominado valor de Shapley que ha sido punto de referencia para abrir nuevos campos de estudio.

Se puede decir que, desde entonces, la teoría de juegos ha captado el interés de muchos investigadores quienes han encontrado diversas aplicaciones en áreas como como economía, política, biología, psicología, ciencias de la informática, inteligencia artificial, entre muchas otras. Algunos ejemplos de estas aplicaciones las podemos encontrar en (López y Ponce, 2017 [11]), (Tijs y Driessen, 1986 [22]), (Vázquez-Brage, van den Nouweland y García, 1997 [23]), (Otten, 1993 [15]), (Fiestras, García y Mosquera, 2011 [8]), (Navarro, 2015) [14]), entre otros.

Ahora, existen variedad de situaciones donde un grupo de agentes, sean individuos, empresas, entidades, proyectos, estados, entre otros, deben ponerse de acuerdo para tomar decisiones. En el siguiente trabajo consideraremos la siguiente situación: Imagine que hay n jugadores o agentes, los cuales deben elegir una opción entre m posibles opciones; cada opción les otorga una utilidad diferente, lo que conlleva a que cada agente prefiera elegir la opción que le genere mayor utilidad. El problema al que se enfrentan los agentes es cómo ponerse de acuerdo para elegir sólo una de ellas. Los principales interrogantes por resolver son:

- ¿Qué opción deben elegir?
- ¿Cómo llegar a un acuerdo de tal forma que todos los agentes queden conformes con la opción escogida y no haya motivos para cambiar de decisión?
- ¿Cómo convencer y/o incentivar a un jugador de elegir una opción que no sea favorable para él?

Esta clase de situaciones se denominan problemas de decisión multiagente. El objetivo general de este trabajo es contribuir con la caracterización de soluciones para esta clase de problemas, modelando el problema desde el punto de vista de la teoría de juegos cooperativos, determinando diferentes soluciones y estudiando las propiedades de las mismas. Para lograr este objetivo, se estudiaron las propiedades del valor de Shapley y se adaptaron a las soluciones propuestas.

La estructura del texto está dividida en dos partes. La primera parte contiene el marco teórico dividido en dos capítulos. En el capítulo 1, se estudian los conceptos más importantes de la teoría de juegos cooperativos, necesarios para abordar el problema. Además, se habla del valor de Shapley, de sus propiedades y se mencionan dos caracterizaciones alternas, las cuales se usaron como base para caracterizar la solución propuesta del presente trabajo de investigación. En el capítulo 2, se mencionan algunos antecedentes de problemas relacionados con problemas de decisión multiagente y se plantea el problema. La segunda parte hace referencia a las aplicaciones, los resultados y las conclusiones. En el capítulo 3, se modelan soluciones al problema desde tres perspectivas diferentes. La primera solución, denominada Solución de Distribución Socialmente Óptima, se plantea de tal manera que la solución al problema sea directa, es decir, la solución nos informa el pago final y óptimo que recibirá cada uno de los agentes, y se da una caracterización de la solución; la segunda solución, se denomina Solución de Incentivos y Compensaciones Óptimas, se plantea de tal manera que la solución al problema sea indirecta, es decir, arroja información sobre cuáles son los incentivos o las compensaciones que tendrán que dar o recibir los jugadores, de tal forma que todos queden conformes con la decisión tomada; por último, la tercera solución se denomina Solución Dual de Distribución Socialmente Óptima, donde se plantea el problema desde un punto de vista pesimista y se demuestra que la Solución de Distribución Socialmente Óptima y la Solución Dual de Distribución Socialmente Óptima son soluciones autoduales. Finalmente, se dan las conclusiones sobre el trabajo realizado.

Parte I

Marco teórico

Fundamentos teóricos de teoría de juegos cooperativos

La teoría de juegos cooperativos se encarga de estudiar, mediante modelos matemáticos, la toma de decisiones de un grupo de agentes que deciden cooperar con el fin de optimizar sus beneficios o minimizar sus costos. El propósito fundamental de esta teoría es estudiar cómo se debe distribuir de una manera justa la ganancia obtenida en conjunto o el costo obtenido en conjunto, resultado de la cooperación. En este capítulo, se abordan las definiciones básicas de la teoría de juegos cooperativos y presentaremos la notación que utilizaremos a lo largo de este proyecto. En la sección 1.1, se dan las definiciones de juego cooperativo y solución de un juego, basándonos en (Driessen, 2013 [7]). En la sección 1.2 se dan algunos conceptos y definiciones necesarias para poder abordar el problema desde el punto de vista de la teoría del valor, con base en (Peters, 2015 [16]) y (Driessen, 2013 [7]). Luego, en la sección 1.3, se presenta el valor de Shapley y se mencionan las propiedades que satisface y su respectiva interpretación, basándonos en (Shapley, 1953 [19]), (Winter, 2002 [24]) y (Roth, 1988 [17]). Finalmente, en la sección 1.4, se habla de dos caracterizaciones alternas para el valor de Shapley, expuestas en (Hart y Mas-Colell, 1989 [9]), (Myerson, 1977 [12]) y (Myerson, 1980 [13]), que se usaron como base para poder caracterizar la solución propuesta a nuestro problema.

1.1. Juegos cooperativos

Definición 1.1. *Consideremos $n \in \mathbb{N}$. Un* ***juego cooperativo n-personal en forma de función característica*** *es una pareja ordenada (N, v), donde N es un conjunto de n individuos y $v : 2^N \to \mathbb{R}$ es una función de variable real sobre el conjunto potencia 2^N, es* *decir, asigna a cada subconjunto $S \subseteq N$ el valor $v(S)$, tal que $v(\emptyset) = 0$. También se le conoce como juego cooperativo de utilidad transferible.*

Denominaremos *agentes o jugadores* a los elementos del conjunto N, *coalición* a cualquier subconjunto de jugadores $S \subseteq N$ y *valía de la coalición* S al valor $v(S)$. Si $S = N$, diremos que se ha formado la *gran coalición*. Además, al número de jugadores que forman una coalición S lo denotaremos mediante $|S| = s$. Por lo general, denotaremos al juego cooperativo (N, v) simplemente mediante su función característica v. Luego, al conjunto de todos los juegos (N, v) lo denotaremos mediante $G^n = \{v : 2^N \to \mathbb{R} | v(\emptyset) = 0\}$ con $|N| = n$. Podemos definir dos operaciones en G^n:

1. $(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$, para todo $v_1, v_2 \in G^n$ y $S \subseteq N$
2. $(\lambda v)(S) = \lambda v(S)$, para todo $v \in G^n, \lambda \in \mathbb{R}$ y $S \subseteq N$.

Con estas operaciones, G^n es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, cuya dimensión es $2^n - 1$.

El valor $v(N)$ lo podemos interpretar como la utilidad conseguida (o el costo, dependiendo el contexto), resultado de la cooperación de todos los jugadores involucrados en el juego v. El propósito fundamental de la teoría de juegos cooperativos es estudiar y analizar cómo se debe de repartir dicha utilidad (o costo) entre todos los jugadores en N de tal forma que se optimicen los beneficios individuales (o minimicen los costos individuales).

Definición 1.2. *Una* ***solución*** *de un juego cooperativo es un operador $\varphi : G^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, donde $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) := \{A : A \subseteq \mathbb{R}^n\}$, que asigna a cada $(N, v) \in G^n$ un conjunto $\varphi(v)$. Si $\varphi(v) \in \mathbb{R}^n$ es un punto, se le denomina vector de pagos y la coordenada $\varphi_i(v)$ es el pago correspondiente al jugador i.*

Ejemplo 1.1 (Inversiones)**.** *Supongamos que Alejandra, Ricardo y Lucía son tres inversionistas que desean invertir en un fondo común sobre una base a corto plazo (3 meses) y consideremos que la tasa de interés anual (dada en la tabla 1.1) es una función de suma invertida.* [1]

[1] Este ejemplo es una adaptación del ejemplo (Manejo de inversiones) expuesto en (Sánchez, 2010 [20]).

Depósito	Tasa de interés anual
\$0 – \$30,000	9.25 %
\$30,001 – \$50,000	12.75 %
\$50,001 – \$100,000	17.25 %

Tabla 1.1: *Tasa de interés anual (ejemplo 1.1).*

Además, supongamos que Alejandra cuenta con \$27,000 *para invertir, Ricardo con* \$16,000 *y Lucía con* \$22,800*. Claramente, esta es una situación donde a los jugadores les conviene cooperar porque aumentarían sus rendimientos y donde les conviene aún más, si todos deciden cooperar. Esta situación la podemos modelar mediante un juego cooperativo* (N, v) *donde* $N = \{Alejandra(A), Ricardo(R), Lucía(L)\}$ *y donde la función característica* v*, definida en la tabla 1.2, estaría dada por los rendimientos totales que conseguirían los jugadores que conforman cada coalición* $S \subseteq N$*.*

S	$v(S)$
$\{A\}$	624.375
$\{R\}$	370
$\{L\}$	527.25
$\{A, R\}$	1,370.625
$\{A, L\}$	1,587.375
$\{R, L\}$	1,236.75
$\{A, R, L\}$	2,837.625

Tabla 1.2: *Función característica (ejemplo 1.1).*

Note que los jugadores ganan más rendimientos si deciden invertir todos juntos. Sin embargo, surge una pregunta interesante... ¿Cómo se deben de repartir los rendimientos entre los jugadores de una coalición, considerando que los montos a invertir son diferentes, pero donde es necesaria la cooperación si se quieren maximizar los rendimientos que consiguen individualmente?

Suponiendo que todos deciden cooperar, una posible solución a este juego cooperativo sería repartir el rendimiento total conseguido en la gran coalición de manera proporcional a la cantidad invertida por cada uno. Es decir, la asignación para esta solución estaría dada por:

$$\varphi_i(v) = \frac{inversión\ \ individual\ \ del\ \ jugador\ \ i}{inversión\ \ colectiva} \cdot v(N). \tag{1.1}$$

El vector de pagos sería $\varphi(v)$ =(1,164.375, 690, 983.25), donde las entradas $\varphi_1(v), \varphi_2(v)$ y $\varphi_3(v)$ corresponderían a las utilidades de Alejandra, Ricardo y Lucía, respectivamente.

Otra posible solución sería que cada uno obtenga los rendimientos que consiguen individualmente y que el excedente lo repartan entre todos, considerando que los tres son igual de importantes para poder generar rendimientos con la tasa más alta. Es decir, la asignación para esta solución estaría dada por:

$$\varphi_i(v) = v(\{i\}) + \frac{v(N) - \sum\limits_{i \in N} v(\{i\})}{n}. \tag{1.2}$$

El vector de pagos sería $\varphi(v)$ =(1,063.04, 808.66, 965.91).

Note que pueden existir infinidad de soluciones. Sin embargo, cada solución puede satisfacer diversas propiedades que se denominan axiomas; y elegir la mejor solución, dependerá de las propiedades que los jugadores involucrados en el juego quieran que se satisfagan.

1.2. Conceptos generales

Definición 1.3. *Consideremos un juego cooperativo $v \in G^n$ y un jugador $i \in N$. Al valor obtenido mediante*

$$v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

se le denomina la ***contribución marginal*** *del jugador i a la coalición $S \subseteq N$.*

Definición 1.4. *Consideremos un juego cooperativo* $v \in G^n$ *y cualquier par de coaliciones* $S, T \subseteq N$ *tal que* $S \cap T = \emptyset$. *Si se satisface que*

$$v(S \cup T) = v(S) + v(T), \text{ para todo } S, T \subseteq N,$$

se dice que el juego v *es un* ***juego aditivo.***

Definición 1.5. *Consideremos un juego cooperativo* $v \in G^n$ *y cualquier par de coaliciones* $S, T \subseteq N$ *tal que* $S \cap T = \emptyset$. *Si se satisface que*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \text{ para todo } S, T \subseteq N,$$

se dice que el juego v *es un* ***juego superaditivo.***

Definición 1.6. *Consideremos un juego cooperativo* $v \in G^n$ *y cualquier par de coaliciones* $S, T \subseteq N$ *tal que* $S \cap T = \emptyset$. *Si se satisface que*

$$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T), \text{ para todo } S, T \subseteq N,$$

se dice que el juego v *es un* ***juego subaditivo.***

Note que en los juegos superaditivos hay incentivos para que se formen las coaliciones, siempre y cuando el juego se trate de maximizar beneficios. Por el contrario, si el juego se trata minimizar costos, a los jugadores les conviene la cooperación en los juegos subaditivos.

Definición 1.7. *Consideremos un juego cooperativo* $v \in G^n$ *y cualquier par de coaliciones* $S \subseteq T \subseteq N$. *Si se satisface que*

$$v(S) \leq v(T), \text{ para todo } S \subseteq T \subseteq N,$$

se dice que el juego v *es un* ***juego creciente.***

Definición 1.8. *Consideremos un juego cooperativo* $v \in G^n$ *y cualquier par de coaliciones* $S \subseteq T \subseteq N$. *Si se satisface que*

$$v(S) \geq v(T), \text{ para todo } S \subseteq T \subseteq N,$$

se dice que el juego v *es un* ***juego decreciente.***

Note que en los juegos crecientes, también hay incentivos para que se formen las coaliciones, siempre y cuando el juego se trate de maximizar beneficios. Por el contrario, si el juego se trata de minimizar costos, a los jugadores les conviene la cooperación en los juegos decrecientes.

Por ejemplo, el juego v del ejemplo 1.1, es un juego superaditivo y creciente.

Definición 1.9. *Consideremos un juego cooperativo $v \in G^n$ y un jugador $i \in N$. Si se satisface que*

$$v(S \cup \{i\}) = v(S), \text{ para todo } S \subseteq N \setminus \{i\},$$

se dice que i es un ***jugador nulo*** *en el juego v.*

Note que la participación de un jugador nulo a cualquier coalición no es indispensable porque su aporte es nulo. Sólo juega el papel de observador en el juego.

Definición 1.10. *Consideremos un juego cooperativo $v \in G^n$ y un jugador $i \in N$. Si se satisface que*

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\}), \text{ para todo } S \subseteq N \setminus \{i\},$$

se dice que i es un ***jugador dummy*** *en el juego v.*

Note que la contribución marginal (ver definición 1.3) de un jugador dummy a cualquier coalición es su valía individual y por tanto, su cooperación no beneficia a los demás jugadores en el juego.

Definición 1.11. *Consideremos un juego cooperativo $v \in G^n$ y dos jugadores $i, j \in N$. Si se satisface que*

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}) \text{ para todo } S \subseteq N \setminus \{i, j\},$$

se dice que los jugadores i, j son ***sustitutos*** *en el juego v.*

Note que la contribución marginal de dos jugadores sustitutos es la misma y, por tanto, uno puede sustituir al otro.

Definición 1.12. *Consideremos un juego cooperativo* $v \in G^n$ *y* S_n *el conjunto de permutaciones del conjunto de jugadores* N*, esto es:*

$$S_n = \{\sigma : N \to N \,|\, \sigma \;\; es \;\; una \;\; función \;\; biyectiva\}.$$

Definimos el ***juego permutado*** $\sigma v \in G^n$ *mediante*

$$(\sigma v)(S) := v(\sigma S), \tag{1.3}$$

donde $\sigma S := \{\sigma(i) : i \in S\}$.

Ejemplo 1.2 (Juego permutado)**.** *Consideremos el conjunto de jugadores* $N = \{A, R, L\}$ *del ejemplo 1.1, el juego cooperativo* v *definido en la tabla 1.2 y* $\sigma \in S_n$ *una permutación del conjunto de jugadores* N *dada por:*

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & R & L \\ R & L & A \end{pmatrix}.$$

El juego permutado $\sigma v \in G^n$ *queda definido como se muestra en la tabla 1.3.*

S	$\sigma v(S)$	$v(\sigma S)$
{A}	{R}	370
{R}	{L}	527.25
{L}	{A}	624.375
{A,R}	{R,L}	1,236.75
{A,L}	{R,A}	1,370.625
{R,L}	{L,A}	1,587.375
{A,R,L}	{R,L,A}	2,837.625

Tabla 1.3: *Función característica del juego permutado del ejemplo 1.1.*

(Kalai y Samet, 1987 [10]) presentan la siguiente definición.

Definición 1.13. *Consideremos un juego cooperativo* $v \in G^n$*. Denotaremos mediante* v^* *al* ***juego dual*** *de* v *dado por:*

$$v^*(S) = v(N) - v(N \setminus S) \text{ para todo } S \subseteq N.$$

Ejemplo 1.3 (Juego dual). *Consideremos el conjunto de jugadores $N = \{A, R, L\}$ del ejemplo 1.1 y el juego cooperativo v definido en la tabla 1.2. El juego dual v^* queda definido como se muestra en la tabla 1.4.*

S	$v^*(S)$
{A}	1,600.875
{R}	1,250.25
{L}	1467
{A,R}	2310.375
{A,L}	2,467.625
{R,L}	2,213.25
{A,R,L}	2,837.625

Tabla 1.4: *Función característica del juego dual del ejemplo 1.1.*

1.3. El valor de Shapley

(Shapley, 1953 [19]), hace un gran aporte a la teoría de juegos cooperativos introduciendo uno de los valores más usados y conocidos que dan solución a diversos problemas de repartición de ganancias o costos, el denominado valor de Shapley. Este valor consiste en un método de distribución de ganancias o costos que se caracteriza por satisfacer cuatro propiedades elementales y deseables, las cuales se mencionan a continuación.

Axioma 1.1. *Una solución φ satisface **nulidad**, si para todo juego cooperativo $v \in G^n$ y todo jugador nulo $i \in N$ se tiene que*

$$\varphi_i(v) = 0.$$

La interpretación de este axioma es que si un jugador no aporta nada a la cooperación entonces tampoco obtendrá beneficio alguno.

Axioma 1.2. *Una solución φ satisface **eficiencia**, si para todo juego cooperativo $v \in G^n$ se tiene que*

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N).$$

La interpretación de este axioma es que toda la utilidad conseguida por los jugadores que aportan a la cooperación se debe de repartir sin faltar o sobrar excedentes.

Axioma 1.3. *Una solución φ satisface **simetría**, si para todo juego cooperativo $v \in G^n$ se tiene que*

$$\varphi(\sigma v) = \sigma(\varphi(v)),$$

donde $\sigma v \in G^n$ es el juego permutado, es decir, para todo jugador $i \in N$, se satisface que

$$\varphi_i(\sigma v) = \varphi_{\sigma(i)}(v).$$

El axioma anterior implica que si $i, j \in N$ son jugadores sustitutos en el juego v, entonces se tiene que $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$.

La interpretación de este axioma es que, si dos jugadores invierten roles o simplemente uno suplanta al otro, el pago que recibirán también se debe invertir para que cada uno reciba el pago que le correspondía al jugador que están suplantando. La idea es que, si dos jugadores aportan lo mismo a la cooperación, obtengan los mismos beneficios.

Axioma 1.4. *Una solución φ satisface **linealidad**, si para cualesquiera dos juegos cooperativos $v, w \in G^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\varphi(\alpha v + w) = \alpha\varphi(v) + \varphi(w).$$

La interpretación de este axioma es que la solución es una aplicación lineal sobre el espacio vectorial G^n.

Teorema 1.1 (Shapley, 1953)**.** *Existe una única solución u operador $\varphi : G^n \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de nulidad, eficiencia, simetría y linealidad denominado el valor de Shapley, la cual está dada por:*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S \cup \{i\}) - v(S)], \text{ para todo } i \in N.$$

□

Para detalles de la demostración, se remite al lector a la referencia (Shapley, 1953 [19]).

El propósito principal del valor de Shapley[2] es asignar a cada jugador $i \in N$, el valor esperado de las contribuciones marginales de todas las coaliciones $S \subset N \setminus \{i\}$ a las que se incorpora. Es decir, el valor $Sh_i(v)$ es el valor esperado del siguiente proceso aleatorio:

- Primero, con distribución uniforme se elige una $s \in \{0, 1, ..., n-1\}$, es decir, la cardinalidad de una coalición $S \subset N \setminus \{i\}$.
- Nuevamente, con distribución uniforme se elige aleatoriamente una de las $\binom{n-1}{s}$ coaliciones $S \subset N \setminus \{i\}$ disponibles que satisfacen $|S| = s$.
- Finalmente, se le asigna al jugador $i \in N$ la contribución marginal que aporta al cooperar con los jugadores en S.

Lema 1.1. *El valor de Shapley es una solución autodual, es decir, satisface que*

$$Sh_i(v) = Sh_i(v^*), \text{ para todo } i \in N.$$

Demostración:

Consideremos un juego cooperativo $v \in G^n$ y $Sh(v)$ la respectiva solución, dada por el valor de Shapley (usaremos la expresión dada por (Driessen, 1983 [6])). Esto es:

$$Sh_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(N \setminus S) - v(S)), \text{ para todo } i \in N. \tag{1.4}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} Sh_i(v^*) &= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v^*((N \setminus S) - v^*(S)) \\ &= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}((v(N) - v(S)) - (v(N) - v(N \setminus S))) \\ &= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(N \setminus S) - v(S)) \\ &= Sh_i(v) \text{ para todo } i \in N. \end{aligned} \tag{1.5}$$

□

[2]De aquí en adelante, denotaremos al valor de Shapley de un juego v mediante $Sh(v)$.

Ejemplo 1.4 (Valor de Shapley). *La solución para el juego v correspondiente al ejemplo 1.1 y su respectivo juego dual v^*, según el valor de Shapley es:*

$$Sh(v) = \left(\frac{26045}{24}, \frac{18785}{24}, \frac{23273}{24}\right) = Sh(v^*).$$

1.4. Otras caracterizaciones del valor de Shapley

(Myerson, 1977 [12]), introduce el concepto de contribuciones balanceadas y da una nueva caracterización del valor de Shapley para juegos con estructura de cooperación dada por una gráfica, haciendo uso de esta propiedad junto a la propiedad de eficiencia. (Para más detalles se remite al lector a la referencia).

Axioma 1.5. *Una solución φ satisface **contribuciones balanceadas**, si para todo juego cooperativo $v \in G^n$ se tiene que*

$$\varphi_i(v) - \varphi_i(v|_{N\setminus\{j\}}) = \varphi_j(v) - \varphi_j(v|_{N\setminus\{i\}}),$$

para todo$\{i, j\} \subseteq N$, donde $(v|_{N\setminus\{k\}})$ corresponde al juego restringido si se retira el jugador k, es decir, el juego restringido a $N \setminus \{k\}$.

La interpretación de este axioma es que si los jugadores aceptan la solución cuando se forma la gran coalición, entonces $\varphi_i(v) - \varphi_i(v|_{N\setminus\{j\}})$ corresponde a la cantidad que el jugador i gana o pierde cuando la gran coalición ya está formada y el jugador j decide retirarse. El axioma afirma que la cantidad que gana o pierde el jugador i por la retirada del jugador j debe ser la misma a la cantidad que gana o pierde el jugador j por la retirada del jugador i. Y esto se debe satisfacer para todo par de jugadores. De esta manera, si algún jugador decide retirarse de la cooperación, todos los demás jugadores se verán igualmente afectados.

Tres años más tarde, (Myerson, 1980 [13]), define el axioma de contribuciones balanceadas para estructuras de conferencias en y luego, (Sánchez, 1997 [18]), usa ese resultado y lo define de manera particular para todo subconjunto no vacío $S \subseteq N$ y para todo juego $v \in G^n$ de la siguiente manera:

Axioma 1.6. *Una solución φ satisface **contribuciones balanceadas en coaliciones**, si para todo juego cooperativo $v \in G^n$ se tiene que*

$$\varphi_i(S) - \varphi_i(S \setminus \{j\}) = \varphi_j(S) - \varphi_j(S \setminus \{i\}),$$

para todo $\{i, j\} \subseteq S$ y cualquier coalición $S \subseteq N$, con $S \neq \emptyset$.

En este caso, $\varphi(S)$ corresponde al vector solución de pagos que resulta cuando la coalición S se forma y los jugadores acuerdan usar la solución φ. Por tanto, la interpretación de este axioma es la misma que la anterior; la diferencia es que no sólo se satisface para la gran coalición, sino para toda coalición $S \subseteq N$ que involucre dos o más jugadores.

Teorema 1.2 (Myerson, 1977)**.** *El valor de Shapley es la única solución que satisface los axiomas de eficiencia y contribuciones balanceadas.*

$\square$

Para detalles de la demostración, se remite al lector a la referencia (Myerson, 1977 [12]).

Por otra parte, (Hart y Mas-Colell, 1989 [9]), usan la propiedad de consistencia y dan una nueva caracterización del valor de Shapley para juegos en forma de función característica (el potencial), haciendo uso de esta propiedad junto a la propiedad de solución estándar para juegos bipersonales.

Definición 1.14. *Consideremos un juego cooperativo $v \in G^n$, un operador solución φ y una coalición $T \subset N$. Se define el **juego reducido** (T, v_T^φ) mediante*

$$v_T^\varphi(S) = v(S \cup T^c) - \sum_{i \in T^c} \varphi_i(S \cup T^c, v), \text{ para toda } S \subset T,$$

donde $T^c = N \setminus T$.

Observación: Existen diferentes maneras de definir un juego reducido.

Axioma 1.7. *Una solución φ satisface **consistencia**, si para cada juego cooperativo $v \in G^n$ se tiene que $\varphi_i(T, v_T^\varphi) = \varphi_i(N, v)$, para toda coalición $T \subset N$ y todo $i \in T$.*

La interpretación de este axioma es que, si algún jugador se retira de la cooperación llevándose consigo su respectivo pago, entonces al definir el nuevo juego reducido para repartir la cantidad restante, la solución del nuevo juego reducido debe ser igual a la del juego original.

Axioma 1.8. *Una solución φ es* ***estándar para juegos bipersonales****, si para cada juego cooperativo $v \in G^n$ con $N = \{i, j\}$ se tiene que*

$$\varphi_i(v) = v(\{i\}) + \frac{1}{2}[v(\{i,j\}) - v(\{i\}) - v(\{j\})] \text{ para todo } i \neq j.$$

La interpretación de este axioma es que, si dos jugadores deciden cooperar para obtener un mayor beneficio, el excedente que consiguen debe de repartirse en partes iguales entre los dos jugadores.

Teorema 1.3 (Hart, Mas-Colell, 1989)**.** *Consideremos φ un operador solución. Entonces φ es consistente y estándar para juegos bipersonales si y sólo si φ es el valor de Shapley.*

□

Para detalles de la demostración, se remite al lector a la referencia (Hart y Mas-Colell, 1989 [9]).

Problemas de decisión multiagente

Los problemas de decisión multiagente son aquellos donde un grupo de agentes tienen un conjunto finito de decisiones, cada decisión le otorga un beneficio diferente a cada agente, lo que conlleva a que los agentes opten por la opción que les genere un mayor beneficio. Sin embargo, únicamente deben elegir una de ellas. El problema radica en cómo los agentes pueden llegar a un acuerdo para elegir solamente una opción entre todas. En la sección 2.5 se mencionan algunos estudios relacionados con esta clase de problemas. En la sección 2.6 se plantean tres situaciones diferentes como ejemplos para motivar el problema y se propone un planteamiento del problema mediante matrices de tamaño $n \times m$ donde los renglones representan los jugadores o agentes, las columnas representan las posibles opciones o alternativas que pueden seleccionar los jugadores y, finalmente, las entradas de la matriz representan las respectivas utilidades de los jugadores en cada una de las opciones.

2.5. Antecedentes

Los problemas de decisión multiagente han sido blanco de estudio de diversos investigadores. Algunos estudios identificados sobre el tema son:

- (Bazzan, Bordini y Campbell, 2002 [1]), relacionan problemas de decisión multiagente con el ejercicio del dilema del prisionero iterado. En este artículo hablan sobre cómo utilizaron el dilema del prisionero iterado para estudiar, mediante simulaciones, situaciones de interacciones sociales donde los agentes tienen “sentimientos morales” hacia los agentes de su mismo grupo social y cómo eso agentes altruistas impactan de manera positiva a su grupo social.

- (Clarke, 1971 [4]), estudia negociaciones multilaterales de bienes públicos donde de alguna manera busca incentivar a los individuos a subestimar su demanda de bienes públicos en relación con otros bienes.

- (Stone y Veloso, 1998 [21]), relacionan sistemas multiagente con árboles de decisión para simular sistemas de fútbol robótico donde un agente control tiene un dominio multiagente completo, capaz de controlar a los demás agentes.

- (Bolger, 1993 [2]), estudió la teoría del valor para juegos con n jugadores y r alternativas, abordando el problema mediante juegos en función partición y logrando tres caracterizaciones. Más adelante, (Bolger, 2002 [3]), continuó con este mismo estudio y caracterizó la solución usando una propiedad equivalente a la propiedad de consistencia para juegos de utilidad transferible expuesta en (Driessen y Radzik, 1998 [5]).

2.6. Planteamiento del problema

Para la realización de este trabajo, primero se estudió la teoría del valor y se estudiaron algunas investigaciones particulares de distintas situaciones, donde se abordaban los problemas desde el punto de vista de la teoría de juegos cooperativos, con el fin de identificar las diversas maneras de modelar un problema mediante esta interesante teoría. Entre ellos, se estudiaron los siguientes trabajos:

- (López y Ponce, 2017) [11]) en su artículo: *"An index for agents on ordered pairs"*, estudian el desempeño de dos agentes mediante pares ordenados teniendo en cuenta el orden. Aportan una caracterización de la solución abordando el problema desde la teoría de juegos cooperativos y usando las propiedades del valor de Shapley. Finalmente, muestran la aplicación de su modelo a tres situaciones diferentes.

- (Tijs y Driessen, 1986 [22]) en su artículo: *"Game Theory and Cost Allocation Problems"*, usan soluciones conocidas como el valor de Shapley, el nucleolo e introducen el valor Tau para los problemas de asignación de costos.

- (Vázquez, García y van den Nouweland, 1997 [23]) en su artículo: *"Owen's coalitional value and aircraft landing fees"*, estudian la determinación de las tasas de aterrizaje de aviones y dan una caracterización axiomática del valor de Owen.

- (Otten, 1993 [15]) en su artículo: *"Characterizations of a Game Theoretical Cost Allocation Method"*, estudia los métodos desarrollados por la Autoridad del Valle de Tennessee (1930) para dar solución a problemas de asignación de costos de proyectos hídricos multipropósito (métodos como: ENSC, ACA, Valor de Shapley, Nucleolo y Valor Tau), y dan una caracterización axiomática del método ACA (Alternate Cost Avoided) para clases de juegos con jugadores fijos y con jugadores variables.

- (Fiestras, García y Mosquera, 2011 [8]) en su artículo: *"Cooperative games and cost allocation problems"*, estudian aplicaciones de juegos cooperativos para problemas de asignación de costos en las áreas de transporte, recursos naturales e industria energética, donde usan soluciones conocidas como el Valor de Shapley, el núcleo y el nucleolo.

- (Navarro, 2015) [14]) en su tesis de maestría titulada: *"Soluciones axiomáticas para un problema de distribución de costos con consumo sin rivalidad"* estudia problemas que constan de un grupo finito de agentes, los cuales consumen cierta cantidad de cada uno de los bienes dentro de un conjunto finito de bienes. Caracteriza una solución axiomática para el caso discreto extendido, es decir, donde cada agente puede consumir a lo más una unidad de cada uno de los bienes, pero teniendo en cuenta el consumo sin rivalidad.

Como motivación al problema de estudio, veamos las siguientes situaciones particulares.

Ejemplo 2.5. *Supongamos que Alejandra, Ricardo y Lucía son tres comerciantes que necesitan trasladarse de una ciudad A a una ciudad B, pero sólo cuentan con un único vehículo. Además, supongamos que hay tres rutas diferentes para llegar de la ciudad A a la ciudad B y que cada agente conoce la utilidad que obtendrá por determinada ruta. En la figura 2.1, se muestran las tres rutas con su respectivo vector de utilidades, donde las entradas de cada vector representa el beneficio que obtendría Alejandra, Ricardo y Lucía, respectivamente.*

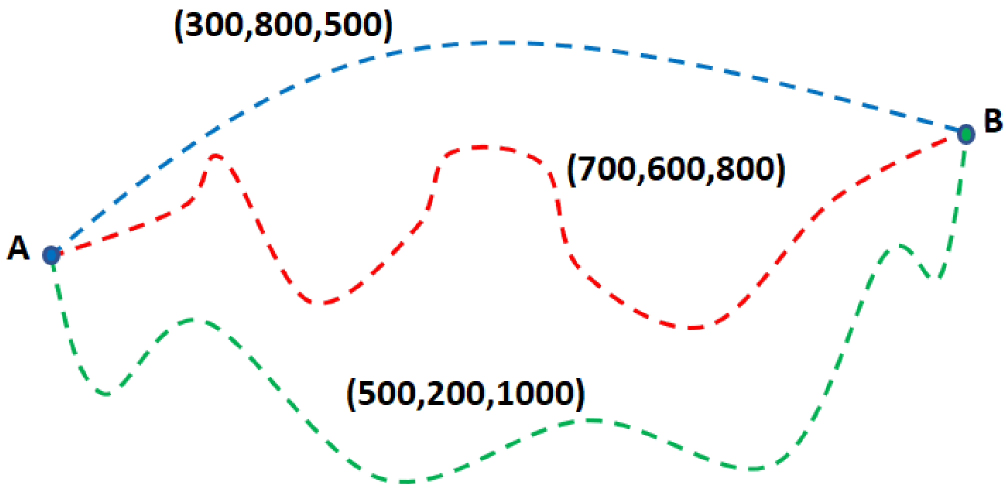

Figura 2.1: *Rutas y utilidades de los comerciantes.*

Ejemplo 2.6. *Supongamos que la Federación quiere repartir el presupuesto de la nación entre todos los estados y hace una serie de propuestas sobre cómo se repartirá el dinero para los diferentes rubros (salud, bienestar, transporte, cultura, deporte, educación, seguridad, medio ambiente, gastos de personal, etc). Cada estado puede preferir algunas propuestas sobre otras, según sus necesidades. Sin embargo, todos los estados deben llegar a un acuerdo para elegir sólo una de ellas. En este caso, el monto total a repartir es el mismo en cada propuesta.*

Ejemplo 2.7. *Supongamos que hay un conglomerado de constructores involucrados en la construcción de un edificio y hay tres terrenos en los cuales puede construirse. El terreno A está en una pendiente y cerca de una fuente de agua, el terreno B está cerca de una central eléctrica y el terreno C es un terreno plano y de suelo duro. Ahora, supongamos que en cada terreno la construcción significa un costo en cada uno de los rubros (electricidad, plomería, seguridad, etc.) y cada tipo de constructor tiene su preferencia sobre un terreno porque individualmente le beneficia. Por ejemplo, a los de electricidad les beneficiaría más el terreno B, porque minimizarían sus costos; por la misma razón, a los de plomería le convendría más el terreno A y quizás a los de seguridad les convendría más el terreno C, porque es menos riesgoso. Sin embargo, deben llegar a un acuerdo porque sólo se construirá un único edificio en el terreno elegido.*

Un **Problema de Decisión Multiagente (PDM)** consiste en un conjunto finito de individuos (agentes o jugadores) $N = \{1, 2, ..., n\}$ y un conjunto finito de decisiones (opciones o alternativas) $M = \{1, 2, ..., m\}$, con $n, m \in \mathbb{N}$. Podemos representar un PDM como una matriz $B \in \mathbb{M}_{n\times m}$ donde cada entrada $b_{ij} \in B$ representa la utilidad del jugador $i \in N$ si decide la opción $j \in M$. Denotaremos mediante $\mathbb{B}$ al conjunto de todos los problemas de decisión multiagente. Esto es,

$$\mathbb{B} := \{B \mid B \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \;\; con \;\; b_{ij} \geq 0\}. \tag{2.6}$$

De aquí en adelante nos referiremos a un PDM simplemente como $B \in \mathbb{B}$.

Ejemplo 2.8. *Consideremos la situación del ejemplo 2.5. Modelaremos la situación mediante la siguiente matriz* $B \in \mathbb{M}_{3\times 3}$

$$B = \begin{pmatrix} 300 & 700 & 500 \\ 800 & 600 & 200 \\ 500 & 800 & 1000 \end{pmatrix},$$

donde el conjunto de jugadores (renglones) son los comerciantes $N = (Alejandra, Ricardo, Lucía)$ *y el conjunto de opciones (columnas) son las rutas* $M = (azul, roja, verde)$.

Parte II

Aplicaciones y resultados

Solución a problemas de decisión multiagente

En este capítulo se plantean tres modelos de solución diferentes para abordar la clase de problemas planteados en el capítulo anterior. En la sección 3.7 se define el concepto de solución directa y se presentan las propiedades o axiomas que puede satisfacer una solución y se da la interpretación de cada propiedad. En la sección 3.8 se asocia un juego cooperativo al problema y se demuestra que la opción socialmente óptima es la que les genera un mayor beneficio a los jugadores, lo cual conlleva a definir la Solución de Distribución Socialmente Óptima. Luego, en la sección 3.9 se define el concepto de solución indirecta y vector de incentivos y compensaciones, y se propone otra manera de asociar un juego cooperativo de tal forma que la solución sólo nos dé el vector de incentivos y compensaciones óptimas, y se define dicha solución. Además, se demuestra que, al sumar dicho vector a los pagos correspondientes a la ruta óptima, las dos soluciones propuestas coinciden. Finalmente, en la sección 3.10 se plantea la solución dual de la primera solución propuesta, la cual tiene una perspectiva pesimista, y se demuestra que son soluciones autoduales.

3.7. Preliminares y propiedades

Definición 3.15. *Una **solución directa** es una función $\varphi : \mathbb{B} \to M \times \mathbb{R}^n$. Entendemos que para cada $B \in \mathbb{B}$, $\varphi(B) = (k, \psi(B))$, donde $k \in M$ corresponderá a la opción elegida por los jugadores y $\psi(B) \in \mathbb{R}^n$ corresponderá al vector de pagos para los jugadores, siendo $\psi_i(B)$ el pago correspondiente al jugador $i \in N$.*

Definición 3.16. *Para $S \subseteq N$ y $B \in \mathbb{B}$ fijos, definimos el **conjunto de opciones socialmente óptimas** para los jugadores en S como el subconjunto*

$$\mathcal{M}^B(S) := \left\{ k \in M \Big| \sum_{i \in S} b_{ik} \geq \sum_{i \in S} b_{ij} \text{ para toda } j \neq k \right\}. \tag{3.7}$$

Definición 3.17. *Se dice que dos opciones $h, j \in M$, con $h \neq j$, son **socialmente indiferentes** en $B \in \mathbb{B}$ si $\sum_{i \in N} b_{ih} = \sum_{i \in N} b_{ij}$.*

Observación: Todas las opciones en $\mathcal{M}^B(S)$ son socialmente óptimas e indiferentes para los jugadores en S.

Axioma 3.9. *Una solución φ satisface **indiferencia entre opciones óptimas**, si para cada $B \in \mathbb{B}$ tal que $|\mathcal{M}^B(N)| \geq 2$ se tiene que*

$$\varphi(B) = (k, \psi(B)), \text{ con } k \in \mathcal{M}^B(N),$$

y $\psi(B) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pagos para los jugadores en N si eligen cualquier opción k socialmente óptima.

La interpretación de este axioma es que, si en el PDM hay varias opciones socialmente óptimas, es decir, por cualquiera de ellas, en conjunto consiguen el mismo beneficio, entonces el vector solución de pagos debe ser el mismo, independientemente de la opción que decidan elegir los jugadores.

Definición 3.18. *Se dice que $B \in \mathbb{B}$ es **trivial**, si existe $k \in M$ tal que $k \in \mathcal{M}^B(S)$ para toda $S \subseteq N$.*

Axioma 3.10. *Una solución φ satisface **trivialidad**, si para cada $B \in \mathbb{B}$ trivial y para todo $i \in N$, se tiene que*

$$\varphi(B) = (k, \psi(B)) \text{ con } \psi_i(B) = b_{ik},$$

donde $k \in \mathcal{M}^B(S)$, para toda $S \subseteq N$

La interpretación de este axioma es que, si a todos los jugadores individualmente les conviene la misma opción, por ejemplo la opción k, entonces la solución debe satisfacer que la opción elegida sea k y que cada uno se quede con lo que consiga individualmente por esa alternativa.

Axioma 3.11. *Una solución φ satisface **k-eficiencia**, si para cada $B \in \mathbb{B}$ y toda $k \in M$, se tiene que*

$$\varphi(B) = (k, \psi(B)), \text{ con } \sum_{i \in N} \psi_i(B) = \sum_{i \in N} b_{ik}.$$

La interpretación de este axioma es que la cantidad conseguida en conjunto por los jugadores al elegir una opción socialmente óptima k debe de repartirse toda entre los jugadores sin que sobre o falte algún excedente.

Definición 3.19. *Se dice que un jugador i es **indiferente** en $B \in \mathbb{B}$, si $b_{ij} = b_{ik}$ para cada $j, k \in M$, $j \neq k$.*

Denotaremos al conjunto de jugadores indiferentes en B, mediante

$$\mathcal{I} := \{i \in N | i \ es \ un \ jugador \ indiferente\}.$$

Axioma 3.12. *Una solución φ satisface **indiferencia**, si para cada $B \in \mathbb{B}$ y cada jugador $i \in \mathcal{I}$, se tiene que*

$$\varphi(B) = (k, \psi(B)), \text{ con } \psi_i(B) = b_{ik}.$$

La interpretación de este axioma es que, si existe algún jugador en el PDM tal que el beneficio que consiga sea el mismo en todas las opciones, entonces la solución debe satisfacer que él se lleve exactamente dicho valor.

Definición 3.20. *Un **Problema de Decisión Multiagente Reducido (PDMR)** será la matriz obtenida de remover algún jugador $i \in N$ o alguna opción $j \in M$ en $B \in \mathbb{B}$. Lo denotaremos mediante B^{-i} si $B^{-i} \in \mathbb{M}_{(n-1)\times m}$ y B_{-j} si $B_{-j} \in \mathbb{M}_{n\times(m-1)}$.*

Definición 3.21. *Consideremos $B \in \mathbb{B}$. Para $S \subseteq N$ fijo, el **Subproblema de Decisión Multiagente (SDM)** $B^S \in \mathbb{B}$ asociado a B, lo definiremos mediante*

$$(B^S)_{ij} = \begin{cases} (B)_{ij} & si \quad i \in S, \\ 0 & si \quad i \notin S. \end{cases} \tag{3.8}$$

Observación: El número de jugadores en cada SDM no cambia, simplemente la utilidad de cualquier jugador que no esté en S se hace cero y por tanto, para $S = \emptyset$, se tiene que $B^{\emptyset} = [0] \in \mathbb{M}_{n\times m}$.

Axioma 3.13. *Una solución φ satisface **contribuciones balanceadas**, si para cada $B \in \mathbb{B}$ y para cada $S \subseteq N$ se tiene que*

$$\psi_j(B^S) - \psi_j(B^{S-k}) = \psi_k(B^S) - \psi_k(B^{S-j}),\ \textit{para todo } j,k \in S,$$

donde $\psi(B^{S-k})$ es el vector de pagos del SDM reducido B^{S-k}, si se retira el jugador $k \in N$ y $\psi(B^{S-j})$ es el vector de pagos del SDM reducido B^{S-j}, si se retira el jugador $j \in N$.

La interpretación de este axioma es análoga a la interpretación del axioma 1.6.

Axioma 3.14. *Una solución φ satisface **consistencia en jugadores no indiferentes**, si para cada $B \in \mathbb{B}$ tal que $\mathcal{I} \neq \emptyset$ y $N \setminus \mathcal{I} \neq \emptyset$ se tiene que*

$$\psi_j(B^{-i}) = \psi_j(B),\ \textit{para todo } i \in \mathcal{I} \textit{ y } j \in N \setminus \mathcal{I}.$$

La interpretación de este axioma es que, si en un PDM existen jugadores indiferentes y no indiferentes y se define un PDMR que involucre únicamente a los jugadores no indiferentes, entonces la solución para ellos debe ser la misma, tanto en el PDM original como en el PDMR.

Definición 3.22. *Se dice que una opción $j \in M$ es **desfavorable** en $B \in \mathbb{B}$, si $b_{ij} < b_{ik}$ para todo jugador $i \in N$ y para toda opción $k, j \in M$, $k \neq j$.*

Axioma 3.15. *Una solución φ satisface **consistencia en opciones no desfavorables**, si para cada $B \in \mathbb{B}$ se tiene que*

$$\varphi(B_{-j}) = \varphi(B),\ \textit{para toda } j \in M \textit{ desfavorable.}$$

La interpretación de este axioma es que, si en un PDM existen opciones desfavorables y se define un PDMR quitando dichas opciones, entonces las soluciones deben ser iguales.

Axioma 3.16. *Una solución φ satisface **homogeneidad**, si para cada $B \in \mathbb{B}$ y $\alpha \geq 0$ se tiene que*

$$\varphi(\alpha B) = (k, \alpha\psi(B)).$$

La interpretación de este axioma es que, si hay un cambio de unidades en el PDM, entonces la solución se debe alterar de manera proporcional.

Axioma 3.17. *Una solución φ satisface **cuasi-aditividad**, si para cualesquiera $B, B' \in \mathbb{B}$ de tamaño $n \times m$ tales que existe una opción $j \in \mathcal{M}^B(S) \cap \mathcal{M}^{B'}(S)$ para toda $S \subseteq N$, se tiene que*

$$\varphi(B + B') = (k, \psi(B + B')) = (k, (\psi(B) + \psi(B'))).$$

Este axioma sólo se satisface bajo la condición de que en ambos PDM's, la opción socialmente óptima sea la misma para cada subconjunto de jugadores, de lo contrario no se satisface. Y la interpretación es que el vector solución del PDM suma coincide con la suma de los vectores solución de los dos PDM's.

Definición 3.23. *Se dice que dos jugadores $i, j \in N$ son **uniformes** en $B \in \mathbb{B}$, si $b_{ik} = b_{jk}$ para cada $k \in M$.*

Axioma 3.18. *Una solución φ satisface **uniformidad**, si para cada $B \in \mathbb{B}$ y cada par de jugadores $i, j \in N$ uniformes, se tiene que*

$$\psi_i(B) = \psi_j(B).$$

La interpretación de este axioma es que, si dos jugadores consiguen los mismos beneficios en cada opción, entonces la solución debe ser la misma para ambos.

Axioma 3.19. *Una solución φ satisface **monotonía**, si para cada $B \in \mathbb{B}$ y para cualesquiera dos jugadores $i, j \in N$ tal que $b_{ih} \leq b_{jh}$ para toda $h \in M$, se tiene que*

$$\psi_i(B) \leq \psi_j(B).$$

La interpretación de este axioma es que, si un jugador obtiene más beneficio que otro jugador en cada una de las opciones, entonces la solución debe satisfacer que su utilidad también debe ser mayor a la del otro jugador.

Axioma 3.20. *Una solución φ satisface **congruencia**, si para cada $B \in \mathbb{B}$ y cada $i \in N$ se tiene que*

$$\min_{j \in M}\{b_{ij}\} \leq \psi_i(B) \leq \max_{j \in M}\{b_{ij}\}.$$

La interpretación de este axioma es que la utilidad de un jugador no puede ser inferior a su beneficio mínimo, ni superior a su beneficio máximo.

Definición 3.24. *Consideremos $B \in \mathbb{B}$ y $\pi \in S_n$ una permutación del conjunto de jugadores N. Un **Problema de Decisión Multiagente Permutado por Jugadores (PDMPJ)** será la matriz $\mathcal{B} = P_\pi B$ obtenida de multiplicar la matriz de permutación P_π por la matriz B. Si denotamos $[B_{i,*}]$ a cada renglón de la matriz B, entonces podemos escribir que*

$$\mathcal{B} = P_\pi \begin{bmatrix} B_{1,*} \\ B_{2,*} \\ \vdots \\ B_{n,*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\pi^{-1}(1),*} \\ B_{\pi^{-1}(2),*} \\ \vdots \\ B_{\pi^{-1}(n),*} \end{bmatrix}.$$

Definición 3.25. *Consideremos $B \in \mathbb{B}$ y $\sigma \in S_n$ una permutación del conjunto de opciones M. Un **Problema de Decisión Multiagente Permutado por Opciones (PDMPO)** será la matriz $\hat{\mathcal{B}} = BP_\sigma$ obtenida de multiplicar la matriz B por la matriz de permutación P_σ. Si denotamos $[B_{*,j}]$ a cada columna de la matriz B, entonces podemos escribir que*

$$\hat{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} B_{*,1} & B_{*,2} & \cdots B_{*,m} \end{bmatrix} P_\sigma = \begin{bmatrix} B_{*,\sigma^{-1}(1)} & B_{*,\sigma^{-1}(2)} & \cdots B_{*,\sigma^{-1}(m)} \end{bmatrix}.$$

Axioma 3.21. *Una solución φ satisface **invarianza por jugadores**, si para cada $B, \mathcal{B} \in \mathbb{B}$ tal que $\mathcal{B}$ es el PDMPJ de B, se tiene que*

$$\varphi(\mathcal{B}) = (k, \psi_{\pi(i)}), \ \textit{para todo} \ i \in N.$$

La interpretación de este axioma es que la solución debe satisfacer que la utilidad de los jugadores no dependa de las etiquetas que se les asignen.

Axioma 3.22. *Una solución φ satisface **invarianza por opciones**, si para cada $B, \hat{\mathcal{B}} \in \mathbb{B}$ tal que $\hat{\mathcal{B}}$ es el PDMPO de B, se tiene que*

$$\varphi(\hat{\mathcal{B}}) = (\sigma(k), \psi).$$

La interpretación de este axioma es que la solución no dependerá del orden en que se presenten las opciones.

Axioma 3.23. *Una solución φ satisface **razonabilidad**, si para cada $B \in \mathbb{B}$ no trivial y cada $i \in N \setminus \mathcal{I}$ tal que $k \in \mathcal{M}^B(\{i\}) \cap \mathcal{M}^B(N)$, se tiene que*

$$\psi_i(B) - b_{ik} < 0.$$

La interpretación de este axioma es que a los jugadores que individualmente les convenga la opción socialmente óptima, siempre deberán destinar parte de su utilidad para incentivar a los demás jugadores a elegir dicha ruta.

Definición 3.26. *Consideremos una opción $k \in M$ y cualesquiera dos jugadores $i, j \in N$ tal que $k \in \mathcal{M}^B(\{i\}) \cap \mathcal{M}^B(\{j\})$. Se dice que la opción óptima k es **más beneficiosa** para el jugador i que para el jugador j si se satisface que*

$$b_{ik} - b_{ih} > b_{jk} - b_{jh},$$

para cada $h, j \in M$, $h \neq k$.

Axioma 3.24. *Una solución φ es **consecuente**, si para cada $B \in \mathbb{B}$ no trivial y cualesquiera dos jugadores $i, j \in N$ tal que $k \in \mathcal{M}^B(\{i\}) \cap \mathcal{M}^B(\{j\}) \cap \mathcal{M}^B(N)$, donde k es más beneficiosa para el jugador i que para el jugador j, se tiene que*

$$\psi_i(B) - b_{ik} \leq \psi_j(B) - b_{jk}.$$

La interpretación de este axioma es que, si existen dos jugadores que individualmente les conviene la opción socialmente óptima, pero teniendo en cuenta que a uno le beneficia más que a otro, entonces la solución debe satisfacer que el incentivo del jugador más beneficiado, debe ser mayor que el incentivo del jugador menos beneficiado.

Definición 3.27. *Un **Problema de Decisión Multiagente Proporcional (PDMP)** será una matriz $B \in \mathbb{B}$ de tamaño $n \times n$ que satisface que para cada jugador $i \in N$ existe una opción $j \in M$ individualmente óptima, diferente para cada jugador, tal que $b_{ih} = b_{ij} - \alpha$ para cada $h, j \in M$, con $h \neq j$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $\sum_{i \in N} b_{i1} = \sum_{i \in N} b_{i2} = \cdots = \sum_{i \in N} b_{in}$.*

Axioma 3.25. *Una solución φ satisface **equidad**, si para cada $B \in \mathbb{B}$ tal que B es un PDMP de tamaño $n \times n$, se tiene que*

$$\psi_i(B) = b_{ih} + \frac{\alpha}{|N|}, \text{ para todo } i \in N \text{ y } h \notin \mathcal{M}^B(\{i\}).$$

La interpretación de este axioma es que, si existe un PDMP, donde la cantidad que dejan de ganar los jugadores por elegir una opción que no les beneficia, es la misma para todos, entonces la solución debe satisfacer que dicha cantidad, se reparta en parte iguales entre todos los jugadores en N.

3.8. Solución de Distribución Socialmente Óptima

3.8.1. Modelación de la solución (SDSO)

Consideremos $B \in \mathbb{B}$. Podemos asociar un juego cooperativo $v^j : 2^N \to \mathbb{R}$ a B de la siguiente manera:

Para cada coalición $S \subseteq N$ y cada $j \in M$, tendríamos

$$v^j(S) = \begin{cases} \max\limits_{k \in M}\{\sum\limits_{i \in S} b_{ik}\} & si \quad S \subsetneq N, \\ \sum\limits_{i \in N} b_{ij} & si \quad S = N. \end{cases} \tag{3.9}$$

Observación: Cada valía $v^j(S)$ representa el beneficio máximo que podrían obtener en conjunto los jugadores en la coalición S, es decir, los jugadores deciden cooperar para formar la coalición S y aceptan una opción desfavorable para ellos, siempre y cuando se les pague la utilidad que conseguirían si tomaran su opción socialmente óptima.

Cada juego v^j lo resolveremos mediante el valor de Shapley y su respectivo vector solución lo denotaremos mediante $Sh(v^j)$.

Proposición 3.1. *Consideremos $B \in \mathbb{B}$ y $v^1, v^2, ..., v^m$ sus respectivos juegos cooperativos asociados. Si $\kappa \in \mathcal{M}^B(N)$ es la opción socialmente óptima para los jugadores en N, entonces $Sh_i(v^\kappa) \geq Sh_i(v^j)$ para todo jugador $i \in N$ y toda opción $j \in M$.*

Demostración:

Consideremos $B \in \mathbb{B}$. Para cada $j \in M$ asociaremos su respectivo juego cooperativo $v^j : 2^N \to \mathbb{R}$ dado por (3.9). Note que en todos los juegos cooperativos v^j asociados a B, las valías de las coaliciones $S \subsetneq N$ coinciden, es decir

$$v^1(S) = v^2(S) = \cdots = v^k(S) = \cdots = v^m(S), \tag{3.10}$$

y para la gran coalición $S = N$, tenemos

$$v^j(N) = \sum_{i \in N} b_{ij}. \tag{3.11}$$

Ahora, cada juego v^j lo resolveremos mediante el valor de Shapley, el cual está dado por:

$$Sh_i(v^j) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v^j(S \cup \{i\}) - v^j(S)], \text{ para todo } i \in N. \tag{3.12}$$

Podemos reescribir la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Sh_i(v^j) &= \underbrace{\sum_{S \subsetneq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v^j(S \cup \{i\}) - v^j(S)]}_{a} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{n}[v^j(N) - v^j(N \setminus \{i\})]}_{b} \text{ para todo } i \in N. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Por la igualdad (3.10), nótese que el resultado del término a es el mismo para toda $j \in M$ y el resultado del término b depende únicamente de (3.11), ya que $v^j(N \setminus \{i\})$ también es el mismo para toda j. Luego, si $\kappa \in \mathcal{M}(N)$ es la **opción socialmente óptima,** es decir

$$\sum_{i \in N} b_{i\kappa} = \text{máx}\{\sum_{i \in N} b_{ij}\} \tag{3.14}$$

entonces

$$v^\kappa(N) \geq v^j(N), \text{ para toda } j, \kappa \in M, \ j \neq \kappa. \tag{3.15}$$

Por lo tanto, el resultado $Sh_i(v^\kappa) \geq Sh_i(v^j)$ es inmediato. Con esto, demostramos que la opción κ maximiza las utilidades de los jugadores en N.

□

Definición 3.28. *Diremos que $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^\kappa))$ es la **Solución de Distribución Socialmente Óptima (SDSO)** para $B \in \mathbb{B}$, donde $\kappa \in \mathcal{M}^B(N)$ y $Sh(v^\kappa)$ es el vector solución del juego v^κ obtenido mediante el valor de Shapley.*

3.8.2. Caracterización de la solución (SDSO)

Proposición 3.2. *La* ***Solución de Distribución Socialmente Óptima (SDSO)*** $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^{\kappa}))$ *satisface los axiomas de indiferencia, $k-$eficiencia y contribuciones balanceadas.*

Demostración:

Consideremos $B \in \mathbb{B}$. Por la proposición 3.1 y la definición 3.28, afirmamos que existe $\kappa \in \mathcal{M}^{B}(N)$ tal que $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^{\kappa}))$ es la SDSO. Recordemos que su juego cooperativo $v^{\kappa} : 2^{N} \to \mathbb{R}$ asociado, está dado por la ecuación (3.9) y su respectiva solución está dada por el valor de Shapley.

A continuación, demostraremos que la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^{\kappa}))$ satisface cada uno de los axiomas.

- **Indiferencia:**

  Supongamos que existe un jugador $i \in N$ indiferente, es decir, recibe la misma utilidad b_{ij} en cualquier opción $j \in M$. Por la ecuación (3.9), tenemos que su contribución marginal es la misma para cualquier coalición $S \subseteq N \setminus \{i\}$, es decir,

  $$v^{\kappa}(S \cup \{i\}) - v^{\kappa}(S) = b_{i\kappa}. \tag{3.16}$$

  Note que el jugador i es un jugador dummy en el juego v^{κ}, y como el valor de Shapley satisface el axioma de jugador dummy, tenemos que

  $$Sh_{i}(v^{\kappa}) = b_{i\kappa}. \tag{3.17}$$

  Por lo tanto, la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^{\kappa}))$ satisface indiferencia.

- **k-eficiencia:**

  Por la ecuación (3.9), tenemos que la valía de la gran coalición N es:

  $$v^{\kappa}(N) = \sum_{i \in N} b_{i\kappa} \tag{3.18}$$

y como el valor de Shapley satisface el axioma de eficiencia, tenemos que

$$\sum_{i\in N} Sh_i(v^{\kappa}) = \sum_{i\in N} b_{i\kappa}. \tag{3.19}$$

Por lo tanto, la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^{\kappa}))$ satisface κ-eficiencia.

- **Contribuciones balanceadas:**

Consideremos $B^S \in \mathbb{B}$. Por la proposición 3.1 y la definición 3.28, afirmamos que existe $\hat{\kappa} \in \mathcal{M}^{B^S}(N)$ cuyo juego cooperativo $v^{\hat{\kappa}} : 2^N \to \mathbb{R}$ asociado, está dado por:

$$v^{\hat{\kappa}}(T) = \begin{cases} \max\limits_{h\in M}\{\sum\limits_{i\in T} b_{ih}\} & si \quad T \subsetneq N, \\ \sum\limits_{i\in N} b_{i\hat{\kappa}} & si \quad T = N, \end{cases} \tag{3.20}$$

donde $T \subseteq N$. Además, su respectiva SDSO es $\varphi(B^S) = (\hat{\kappa}, Sh(v^{\hat{\kappa}}))$.

Ahora, consideremos cualesquiera dos jugadores $j, k \in N$ y supongamos que se retira el jugador j de B^S. Podemos construir un nuevo SDM reducido $B^{S^{-j}}$ donde el conjunto de jugadores es $N \setminus \{j\}$ y supongamos que $\mu \in \mathcal{M}^{B^{S^{-j}}}(N \setminus \{j\})$. Luego, el respectivo juego cooperativo $\hat{v}^{\mu} : 2^{N\setminus\{j\}} \to \mathbb{R}$ asociado es

$$\hat{v}^{\mu}(T) = \begin{cases} \max\limits_{h\in M}\{\sum\limits_{i\in T} b_{ih}\} & si \quad T \subsetneq N \setminus \{j\}, \\ \sum\limits_{i\in T} b_{i\mu} & si \quad T = N \setminus \{j\}, \end{cases} \tag{3.21}$$

donde $T \subseteq N \setminus \{j\}$. Además, su SDSO es $\varphi(B^{S^{-j}}) = (\mu, Sh(\hat{v}^{\mu}))$.

Por otra parte, supongamos que el jugador que se retira de B^S no es el jugador j sino el jugador k. Podemos construir un nuevo SDM reducido $B^{S^{-k}}$ donde el conjunto de jugadores es $N\setminus\{k\}$. Ahora, supongamos que $\lambda \in \mathcal{M}^{B^{S^{-k}}}(N\setminus\{k\})$. Luego, el respectivo juego cooperativo $\bar{v}^{\lambda} : 2^{N\setminus\{k\}} \to \mathbb{R}$ asociado es

$$\bar{v}^{\lambda}(T) = \begin{cases} \max\limits_{h\in M}\{\sum\limits_{i\in T} b_{ih}\} & si \quad T \subsetneq N \setminus \{k\}, \\ \sum\limits_{i\in T} b_{i\lambda} & si \quad T = N \setminus \{k\}, \end{cases} \tag{3.22}$$

donde $T \subseteq N \setminus \{k\}$. Además, su SDSO es $\varphi(B^{S^{-k}}) = (\lambda, Sh(\bar{v}^{\lambda}))$. Ahora, es fácil ver que:

$$v^{\hat{\kappa}}(T) = \hat{v}^{\mu}(T), \text{ para toda } T \subseteq N \setminus \{j\} \tag{3.23}$$

y

$$v^{\hat{\kappa}}(T) = \bar{v}^{\lambda}(T), \text{ para toda } T \subseteq N \setminus \{k\}. \tag{3.24}$$

Luego, como el valor de Shapley satisface el axioma de contribuciones balanceadas, podemos afirmar que en la solución $\varphi(B^S) = (\hat{\kappa}, Sh(v^{\hat{\kappa}}))$, tenemos que:

$$Sh_j(v^{\hat{\kappa}}) - Sh_j(v^{\hat{\kappa}}|_{N\setminus\{k\}}) = Sh_k(v^{\hat{\kappa}}) - Sh_k(v^{\hat{\kappa}}|_{N\setminus\{j\}}). \tag{3.25}$$

Además, note que por las igualdades (3.23) y (3.24), tenemos que

$$v^{\hat{\kappa}}|_{N\setminus\{k\}} = \bar{v}^{\lambda} \quad \text{y} \quad v^{\hat{\kappa}}|_{N\setminus\{j\}} = \hat{v}^{\mu}. \tag{3.26}$$

Lo cual implica que en las soluciones $\varphi(B^S) = (\hat{\kappa}, Sh(v^{\hat{\kappa}}))$, $\varphi(B^{S^{-j}}) = (\mu, Sh(\hat{v}^{\mu}))$ y $\varphi(B^{S^{-k}}) = (\lambda, Sh(\bar{v}^{\lambda}))$ se satisface que

$$Sh_j(v^{\hat{\kappa}}) - Sh_j(\bar{v}^{\lambda}) = Sh_k(v^{\hat{\kappa}}) - Sh_k(\hat{v}^{\mu}). \tag{3.27}$$

Por lo tanto, la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^{\kappa}))$ satisface contribuciones balanceadas.

$\square$

Teorema 3.4. *Existe una única solución $\varphi(B) = (k, \psi(B))$ que es socialmente óptima y que satisface los axiomas de indiferencia, $k-$eficiencia y contribuciones balanceadas y es la Solución de Distribución Socialmente Óptima.*

Demostración:

Primero demostraremos la unicidad.

Consideremos $B \in \mathbb{B}$ y supongamos que existen dos soluciones:

$$\varphi(B) = (k, \psi(B)) \text{ y } \varphi'(B) = (k, \phi(B)) \text{ tal que } k \in \mathcal{M}^B(N), \tag{3.28}$$

que satisfacen los axiomas de $k-$eficiencia, indiferencia y contribuciones balanceadas. Además, consideremos $B^S \in \mathbb{B}$ un SDM asociado a B para cada $S \subseteq N$ y supongamos que existen dos soluciones:

$$\varphi(B^S) = (\hat{k}, \psi(B^S)) \text{ y } \varphi'(B^S) = (\hat{k}, \phi(B^S)) \text{ tal que } \hat{k} \in \mathcal{M}^{B^S}(N) \tag{3.29}$$

para cada B^S, que también satisfacen los axiomas de $k-$eficiencia, indiferencia y contribuciones balanceadas.

Procedamos inductivamente. Si $S = \emptyset$ entonces $B^{\emptyset} = [0] \in \mathbb{M}_{n\times m}$ y por el axioma de indiferencia, afirmamos que en las dos soluciones $\varphi(B^{\emptyset})$ y $\varphi'(B^{\emptyset})$, se satisface que

$$\psi_i(B^{\emptyset}) = 0 = \phi_i(B^{\emptyset}), \text{ para todo } i \in N. \tag{3.30}$$

Ahora, existe una $S \subseteq N$ tal que $B^S \in \mathbb{B}$ es un SDM minimal asociado a B, es decir, con el mínimo número de renglones diferente a cero en B tal que

$$(\hat{k}, \psi(B^S)) \neq (\hat{k}, \phi(B^S)). \tag{3.31}$$

Como B^S es minimal, note que para toda $T \subset S$ existe $B^T \in \mathbb{B}$ un SDM asociado a B^S tal que

$$(\bar{k}, \psi(B^T)) = (\bar{k}, \phi(B^T)). \tag{3.32}$$

Ahora, por el axioma de indiferencia tenemos que en las soluciones $(\hat{k}, \psi(B^S))$ y $(\hat{k}, \phi(B^S))$ se satisface que

$$\psi_i(B^S) = 0 = \phi_i(B^S), \text{ para todo } i \in N \setminus S. \tag{3.33}$$

Y por el axioma de contribuciones balanceadas tenemos que en las soluciones $(\hat{k}, \psi(B^S))$ y $(\hat{k}, \phi(B^S))$ se satisface que

$$\psi_j(B^S) - \psi_j(B^{S^{-k}}) = \psi_k(B^S) - \psi_k(B^{S^{-j}}), \text{ para todo } j, k \in N \tag{3.34}$$

y

$$\phi_j(B^S) - \phi_j(B^{S^{-k}}) = \phi_k(B^S) - \phi_k(B^{S^{-j}}), \text{ para todo } j, k \in N, \tag{3.35}$$

donde $\psi(B^{S^{-k}})$ y $\phi(B^{S^{-k}})$ son vectores de pagos del SDM reducido $B^{S^{-k}}$, si se retira el jugador $k \in N$ y $\psi(B^{S^{-j}})$ y $\phi(B^{S^{-j}})$ son vectores de pagos del SDM reducido $B^{S^{-j}}$, si se retira el jugador $j \in N$.

Note que $S^{-k} \subset S$ y $S^{-j} \subset S$ y por la igualdad (3.32) podemos afirmar que

$$\psi_j(B^{S^{-k}}) = \phi_j(B^{S^{-k}}) \tag{3.36}$$

y

$$\psi_k(B^{S^{-j}}) = \phi_k(B^{S^{-j}}). \tag{3.37}$$

De las igualdades (3.34) y (3.35), obtenemos que

$$\psi_j(B^S) - \psi_k(B^S) = \psi_j(B^{S-k}) - \psi_k(B^{S-j}),\ \text{para todo } j,k \in N \tag{3.38}$$

y

$$\phi_j(B^S) - \phi_k(B^S) = \phi_j(B^{S-k}) - \phi_k(B^{S-j}),\ \text{para todo } j,k \in N. \tag{3.39}$$

Luego, como se satisfacen (3.36) y (3.37), podemos afirmar que

$$\psi_j(B^S) - \psi_k(B^S) = \phi_j(B^S) - \phi_k(B^S),\ \text{para todo } j,k \in N, \tag{3.40}$$

lo cual implica que

$$\psi_j(B^S) - \phi_j(B^S) = \psi_k(B^S) - \phi_k(B^S),\ \text{para todo } j,k \in N. \tag{3.41}$$

Luego, para todo jugador $i \in S \subseteq N$ se satisface:

$$\sum_{i\in S}\left[\psi_i(B^S) - \phi_i(B^S)\right] = |S|\left[\psi_i(B^S) - \phi_i(B^S)\right]. \tag{3.42}$$

Sin embargo, por el axioma de $k-$eficiencia, tenemos:

$$\sum_{i\in S}\psi_i(B^S) = \sum_{i\in S} b_{i\hat{k}} = \sum_{i\in S}\phi_i(B^S), \tag{3.43}$$

lo cual implica que

$$|S|\left[\psi_i(B^S) - \phi_i(B^S)\right] = 0,\ \text{para todo } i \in S. \tag{3.44}$$

Luego, $\psi(B^S) = \phi(B^S)$, es decir, $(\hat{k}, \psi(B^S)) = (\hat{k}, \phi(B^S))$, lo cual contradice la ecuación (3.31).

Por lo anterior, afirmamos que $(\hat{k}, \psi(B^S)) = (\hat{k}, \phi(B^S))$ para todo $B^S \in \mathbb{B}$ asociado a B, y por lo tanto $(k, \psi(B)) = (k, \phi(B))$.

Ahora, para probar la existencia de la solución, recordemos que $(k, \psi(B)) = (\kappa, Sh(v^\kappa))$ y por la proposición 3.2, la existencia es inmediata.

$\square$

Para verificar que los axiomas mencionados en el teorema 3.4 son independientes, proponemos las siguientes cuatro soluciones:

- Consideremos $B \in \mathbb{B}$. Asociaremos el juego cooperativo $v' : 2^N \to \mathbb{R}$ a B, cuya función característica está dada por:

$$v'(S) = \min_{h \in M}\{\sum_{i \in S} b_{ih}\}, \text{ para toda } S \subseteq N \tag{3.45}$$

el cual, resolveremos mediante el valor de Shapley. Diremos que $\varphi_1(B) = (h, Sh(v'))$ es una solución para B donde $h \in M$ es la opción socialmente menos favorable para los jugadores en N y $Sh(v')$ es el vector solución del juego v'.

- Consideremos $B \in \mathbb{B}$ y $k \in \mathcal{M}^B(N)$. Asociaremos el juego cooperativo $u' : 2^N \to \mathbb{R}$ a B, cuya función característica está dada por:

$$u'(S) = \begin{cases} \frac{\sum_{i \in N} b_{ik}}{n} & si \quad |S| = 1, \\ \sum_{i \in S} \max_{h \in M}\{b_{ih}\} & si \quad |S| > 1, \end{cases} \tag{3.46}$$

el cual, resolveremos mediante el valor de Shapley. Diremos que $\varphi_2(B) = (k, Sh(u'))$ es una solución para B donde $k \in M$ es la opción socialmente óptima para los jugadores en N y $Sh(u')$ es el vector solución del juego u'.

- Consideremos $B \in \mathbb{B}$ y $k \in \mathcal{M}^B(N)$. Diremos que $\varphi_3(B) = (k, x)$ es una solución para B donde $k \in M$ es la opción socialmente óptima para los jugadores en N y cada coordenada del vector de pagos x está dada por la utilidad esperada para cada jugador. Esto es:

$$x_i = \frac{\sum_{j \in M} b_{ij}}{|M|}, \text{ para todo } i \in N. \tag{3.47}$$

- Consideremos $B \in \mathbb{B}$ y $k \in \mathcal{M}^B(N)$. Diremos que $\varphi_4(B) = (k, y)$ es una solución para B donde $k \in M$ es la opción socialmente óptima para los jugadores en N y cada coordenada del vector de pagos y, está dado por:

$$y_i = \begin{cases} \min_{j \in M}\{b_{ij}\} & si \qquad i \in \mathcal{I}, \\ \min_{j \in M}\{b_{ij}\} + \frac{\max_{j \in M}\{\sum_{i \in N} b_{ij}\} - \sum_{i \in N} \min_{j \in M}\{b_{ij}\}}{|N \setminus \mathcal{I}|} & si \quad i \in N \setminus \mathcal{I}. \end{cases} \tag{3.48}$$

Lema 3.2. *Consideremos $B \in \mathbb{B}$. Se satisface que*

- *La solución $\varphi_1(B) = (h, Sh(v'))$ satisface los axiomas de indiferencia, $k-$eficiencia y contribuciones balanceadas, pero h no es una opción socialmente óptima.*

- *La solución $\varphi_2(B) = (k, Sh(u'))$ satisface los axiomas de $k-$eficiencia, contribuciones balanceadas y k es una opción socialmente óptima, pero no satisface indiferencia.*

- *La solución $\varphi_3(B) = (k, x)$ satisface los axiomas de indiferencia, contribuciones balanceadas y k es una opción socialmente óptima, pero no satisface $k-$eficiencia.*

- *La solución $\varphi_4(B) = (k, y)$ satisface los axiomas de indiferencia, $k-$eficiencia y k es una opción socialmente óptima, pero no satisface contribuciones balanceadas.*

Demostración:

Veamos que las cuatro soluciones satisfacen los axiomas correspondientes:

- La demostración de que la solución $\varphi_1(B) = (h, Sh(v'))$ satisface los axiomas de indiferencia, $h-$eficiencia y contribuciones balanceadas es análoga a la demostración de la proposición 3.1. Sin embargo, $h \notin \mathcal{M}^B(N)$ por la manera como se define el juego cooperativo v' en la ecuación (3.45).

- Tenemos que $k \in \mathcal{M}^B(N)$ y la demostración de que la solución $\varphi_2(B) = (k, Sh(u'))$ satisface los axiomas de $k-$eficiencia y contribuciones balanceadas es análoga a la demostración de la proposición 3.1. Sin embargo, por la manera como se define el juego cooperativo u' en la ecuación (3.46), es fácil ver que la contribución marginal de todo jugador indiferente $j \in \mathcal{I}$ a cualquier coalición $S \subset N \setminus \{j\}$ puede ser $u'(S \cup \{j\}) - u'(S) \leq b_{jk}$ o $u'(S \cup \{j\}) - u'(S) \geq b_{jk}$. Lo cual implica que el jugador j no es un jugador dummy en el juego u' y, por tanto, $Sh_j(u') \neq b_{jk},$ para todo $j \in \mathcal{I}$. Por lo tanto, $\varphi_1(B) = (h, Sh(v'))$ no satisface indiferencia.

- Tenemos que $k \in \mathcal{M}^B(N)$. Es fácil ver que la solución $\varphi_3(B) = (k, x)$ satisface los axiomas de indiferencia y contribuciones balanceadas, dado que el vector de pagos corresponde al valor esperado y, por tanto, tenemos que para todo jugador $i \in \mathcal{I}$, se satisface que

$$x_i = \frac{\sum\limits_{j \in M} b_{ij}}{|M|} = \frac{|M| b_{ij}}{|M|} = b_{ij}.$$

Además, el retiro de algún jugador no afecta el pago de los demás jugadores y, por tanto, la igualdad del axioma 3.13 siempre será cero. Sin embargo, note que no satisface el axioma de $k-$eficiencia porque al pagar el valor esperado, siempre quedarán excedentes.

- Tenemos que $k \in \mathcal{M}^B(N)$. Es fácil ver que la solución $\varphi_4(B) = (k, y)$ satisface los axiomas de indiferencia y $k-$eficiencia, dado que el vector de pagos está definido de tal manera que los jugadores indiferentes se lleven su pago y a los demás jugadores se les pague su utilidad mínima y el excedente de lo que consigan en la opción socialmente óptima, se reparta en partes iguales entre los jugadores no indiferentes. Sin embargo, $\varphi_4(B) = (k, y)$ no satisface contribuciones balanceadas, lo cual demostraremos mediante el siguiente contraejemplo.

  Considere el siguiente PDM:

  $$B = \begin{pmatrix} 200 & 600 & 500 \\ 150 & 100 & 100 \\ 1000 & 800 & 600 \\ 500 & 500 & 500 \end{pmatrix}.$$

  Note que la solución es $\varphi_4(B) = (2, (400, 300, 800, 500))$.

  Ahora, si se retira el jugador 1, tenemos que

  $$B^{-1} = \begin{pmatrix} 150 & 100 & 100 \\ 1000 & 800 & 600 \\ 500 & 500 & 500 \end{pmatrix}.$$

  Note que la solución es $\varphi_4(B^{-1}) = (1, (325, 825, 500))$.

  Y si se retira el jugador 2, tenemos que

  $$B^{-2} = \begin{pmatrix} 200 & 600 & 500 \\ 1000 & 800 & 600 \\ 500 & 500 & 500 \end{pmatrix}.$$

Note que la solución es $\varphi_4(B^{-2}) = (2, (500, 900, 500))$. Ahora, la diferencia entre lo que gana el jugador 1 en el PDM B menos lo que gana el jugador 1 el PDMR B^{-2} es diferente a la diferencia entre lo que gana el jugador 2 en el PDM B menos lo que gana el jugador 2 el PDMR B^{-1}. Esto es:

$$400 - 500 \neq 300 - 325.$$

Por lo tanto, la solución $\varphi_4(B) = (k, y)$ no satisface contribuciones balanceadas.

$\square$

Corolario 3.1. *Los axiomas relacionados en el teorema 3.4 son independientes.*

Demostración:

Por el lema 3.2, la demostración de que los axiomas del teorema 3.4 son independientes es inmediata.

$\square$

Proposición 3.3. *La* ***Solución de Distribución Socialmente Óptima (SDSO)*** $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^\kappa))$ *satisface los axiomas de indiferencia entre opciones óptimas, trivialidad, consistencia en jugadores no indiferentes, consistencia en opciones no desfavorables, homogeneidad, cuasi-aditividad, uniformidad, monotonía, congruencia, invarianza por jugadores, invarianza por opciones, razonabilidad, consecuente y equidad.*

Demostración:

Consideremos $B \in \mathbb{B}$. Por la proposición 3.1 y la definición 3.28, afirmamos que existe $\kappa \in \mathcal{M}^B(N)$ tal que $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^\kappa))$ es la SDSO. Recordemos que su juego cooperativo $v^\kappa : 2^N \to \mathbb{R}$ asociado, está dado por la ecuación (3.9) y su solución está dada por el valor de Shapley.

A continuación, demostraremos que la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^\kappa))$ satisface cada uno de los axiomas.

- **Indiferencia entre opciones óptimas:**

  Supongamos que existe otra opción $\lambda \in \mathcal{M}^B(N)$, socialmente indiferente con la opción κ, es decir,

  $$\sum_{i\in N} b_{i\kappa} = \sum_{i\in N} b_{i\lambda}. \tag{3.49}$$

  Con esta igualdad, claramente se satisface

  $$v^{\kappa}(S) = v^{\lambda}(S), \text{ para toda } S \subseteq N. \tag{3.50}$$

  Y por tanto, el resultado $Sh_i(v^{\kappa}) = Sh_i(v^{\lambda}),$ para todo $i \in N$, es inmediato.

  Por lo tanto, la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^{\kappa}))$ satisface indiferencia entre opciones óptimas.

- **Trivialidad:**

  Supongamos que la opción $\kappa \in \mathcal{M}^B(S)$ para toda $S \subseteq N$ y por tanto, en el juego (3.9), tenemos que

  $$v^{\kappa}(S) = \sum_{i\in S} b_{i\kappa}, \text{ para toda } S \subseteq N. \tag{3.51}$$

  Note que el juego v^{κ} es un juego aditivo y por tanto todos los jugadores $i \in N$ son jugadores dummy en v^{κ}, y como el valor de Shapley satisface el axioma de jugador dummy, tenemos que

  $$Sh_i(v^{\kappa}) = b_{i\kappa}, \text{ para todo } i \in N. \tag{3.52}$$

  Por lo tanto, la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^{\kappa}))$ satisface trivialidad.

- **Consistencia en jugadores no indiferentes:**

  Supongamos que existe un jugador $j \in N$ indiferente. Por el axioma 3.12, sabemos que su pago será $Sh_j(v^{\kappa}) = b_{j\kappa}$.

  Ahora, removamos al jugador indiferente j del juego B y construyamos un nuevo juego B^{-j}. Esto es:

  $$B^{-j} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,k} & \cdots & b_{n-1,m} \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

donde el conjunto de jugadores es $N \setminus \{j\}$, el conjunto de decisiones sigue siendo M y cada entrada $b_{ih} \in B^{-j}$ representa la utilidad del jugador $i \in N \setminus \{j\}$ si decide la opción $h \in M$.

Como la opción κ sigue siendo la opción socialmente óptima para los jugadores en $N \setminus \{j\}$, el juego cooperativo $\hat{v}^{\kappa} : 2^{N\setminus\{j\}} \to \mathbb{R}$ asociado a la opción κ está dado por:

$$\hat{v}^{\kappa}(S) = \begin{cases} \max\limits_{h\in M}\{\sum\limits_{i\in S} b_{ih}\} & si \quad S \subsetneq N \setminus \{j\}, \\ \sum\limits_{i\in S} b_{i\kappa} & si \quad S = N \setminus \{j\}, \end{cases} \tag{3.54}$$

donde $S \subseteq N \setminus \{j\}$.

Note que $\hat{v}^{\kappa}(S) = v^{\kappa}(S \setminus \{j\}),$ para toda $S \subseteq N \setminus \{j\}$ y por tanto, $Sh_i(\hat{v}^{\kappa}) = Sh_i(v^{\kappa})$ para todo jugador i no indiferente.

Por lo tanto, la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^{\kappa}))$ satisface consistencia en jugadores no indiferentes.

- **Consistencia en opciones no desfavorables:**

Supongamos que existe una opción $j \in M$ desfavorable. Podemos removerla del juego B y construir un nuevo juego B_{-j}. Esto es:

$$B_{-j} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1m-1} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2m-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{nm-1} \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

donde el conjunto de jugadores sigue siendo N, el conjunto de decisiones es $M \setminus \{j\}$ y cada entrada $b_{ih} \in B_{-j}$ representa la utilidad del jugador $i \in N$ si decide la opción $h \in M \setminus \{j\}$. Como la opción κ sigue siendo la opción socialmente óptima para los jugadores en N, el juego cooperativo $\hat{v}^{\kappa} : 2^N \to \mathbb{R}$ asociado a la opción κ está dado por:

$$\hat{v}^{\kappa}(S) = \begin{cases} \max\limits_{h\in M\setminus\{j\}}\{\sum\limits_{i\in S} b_{ih}\} & si \quad S \subsetneq N, \\ \sum\limits_{i\in N} b_{i\kappa} & si \quad S = N, \end{cases} \tag{3.56}$$

donde $S \subseteq N$.

Como la opción j es una opción desfavorable, es decir, no es óptima ni individualmente ni conjuntamente para ningún jugador, tenemos que

$$\hat{v}^{\kappa}(S) \neq \sum_{i \in S} b_{ij}, \text{ para toda } S \subseteq N. \tag{3.57}$$

Lo cual implica que

$$\hat{v}^{\kappa}(S) = v^{\kappa}(S) \text{ para toda } S \subseteq N, \tag{3.58}$$

y, por tanto,

$$Sh_i(\hat{v}^{\kappa}) = Sh_i(v^{\kappa}), \text{ para todo } i \in N, \tag{3.59}$$

demostrando que

$$\varphi(B_{-j}) = (\kappa, Sh(v^{\kappa})) = \varphi(B). \tag{3.60}$$

Por lo tanto, la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^{\kappa}))$ satisface consistencia en opciones no desfavorables.

- **Producto por escalar:**

Consideremos $\alpha \in \mathbb{R}$ y construyamos el juego αB, esto es:

$$\alpha B = \begin{pmatrix} \alpha b_{11} & \alpha b_{12} & \cdots & \alpha b_{1k} & \cdots & \alpha b_{1m} \\ \alpha b_{21} & \alpha b_{22} & \cdots & \alpha b_{2k} & \cdots & \alpha b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha b_{n1} & \alpha b_{n2} & \cdots & \alpha b_{nk} & \cdots & \alpha b_{nm} \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

donde el conjunto de jugadores sigue siendo $N = \{1, 2, ..., n\}$ y el conjunto de decisiones sigue siendo $M = \{1, 2, ..., m\}$.

Ahora, si κ es la opción socialmente óptima en B, también lo es en αB. Además, su juego cooperativo $\hat{v}^{\kappa} : 2^N \to \mathbb{R}$ asociado, está dado por:

$$\hat{v}^{\kappa}(S) = \begin{cases} \max\limits_{j \in M}\{\sum\limits_{i \in S} \alpha b_{ij}\} & si \quad S \subsetneq N, \\ \sum\limits_{i \in S} \alpha b_{i\kappa} & si \quad S = N, \end{cases} \tag{3.62}$$

donde $S \subseteq N$.

Note que $\hat{v}^{\kappa}(S) = \alpha(v^{\kappa})(S),$ para toda $S \subseteq N$. Como el valor de Shapley satisface el axioma de linealidad, afirmamos que

$$\varphi(\alpha B) = (\kappa, \alpha Sh(v^{\kappa})). \tag{3.63}$$

Por lo tanto, la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^{\kappa}))$ satisface homogeneidad.

- **Cuasi-aditividad:**

Consideremos $B, B' \in \mathbb{B}$ y supongamos que existe una opción $j \in \mathcal{M}^{B}(S) \cap \mathcal{M}^{B'}(S)$ para cada $S \subseteq N$ y $\kappa \in \mathcal{M}^{B}(N) \cap \mathcal{M}^{B'}(N)$. Luego, el juego cooperativo $\hat{v}^{\kappa} : 2^N \to \mathbb{R}$ asociado a B', está dado por:

$$\hat{v}^{\kappa}(S) = \begin{cases} \max\limits_{j \in M}\{\sum\limits_{i \in S} b'_{ij}\} & si \quad S \subsetneq N, \\ \sum\limits_{i \in N} b'_{i\kappa} & si \quad S = N, \end{cases} \tag{3.64}$$

donde $S \subseteq N$. Además, su SDSO es $\varphi(B') = (\kappa, Sh(\hat{v}^{\kappa}))$

Ahora, construyamos el problema $B + B'$, esto es:

$$B + B' = \begin{pmatrix} b_{11} + b'_{11} & b_{12} + b'_{12} & \cdots & b_{1k} + b'_{1k} & \cdots & b_{1m} + b'_{1m} \\ b_{21} + b'_{21} & b_{22} + b'_{22} & \cdots & b_{2k} + b'_{2k} & \cdots & b_{2m} + b'_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} + b'_{n1} & b_{n2} + b'_{n2} & \cdots & b_{nk} + b'_{nk} & \cdots & b_{nm} + b'_{nm} \end{pmatrix} \tag{3.65}$$

donde el conjunto de jugadores sigue siendo $N = \{1, 2, ..., n\}$ y el conjunto de opciones sigue siendo $M = \{1, 2, ..., m\}$.

Note que si $\kappa \in \mathcal{M}^{B}(N) \cap \mathcal{M}^{B'}(N)$ entonces $\kappa \in \mathcal{M}^{B+B'}(N)$.

Luego, su juego cooperativo $\bar{v}^{\kappa} : 2^N \to \mathbb{R}$ asociado, está dado por:

$$\bar{v}^{\kappa}(S) = \begin{cases} \max\limits_{j \in M}\{\sum\limits_{i \in S}(b_{ij} + b'_{ij})\} & si \quad S \subsetneq N, \\ \sum\limits_{i \in N}(b_{i\kappa} + b'_{i\kappa}) & si \quad S = N, \end{cases} \tag{3.66}$$

donde $S \subseteq N$. Además, su SDSO es $\varphi(B + B') = (\kappa, Sh(\bar{v}^{\kappa}))$.

Ahora, note que si $j \in \mathcal{M}^{B}(S) \cap \mathcal{M}^{B'}(S)$ entonces $j \in \mathcal{M}^{B+B'}(S)$ para cada $S \subseteq N$. Por tanto, se satisface que $\bar{v}^{\kappa} = v^{\kappa} + \hat{v}^{\kappa}$, y como el valor de Shapley satisface el axioma de aditividad, afirmamos que

$$Sh(\bar{v}^{\kappa}) = Sh(v^{\kappa}) + Sh(\hat{v}^{\kappa}), \tag{3.67}$$

con $Sh(v^{\kappa}) \in \varphi(B)$ y $Sh(\hat{v}^{\kappa}) \in \varphi(B')$.

Por lo tanto, la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^{\kappa}))$ satisface cuasi-aditividad.

- **Uniformidad:**

  Supongamos que existen dos jugadores $i, j \in N$ uniformes, es decir, reciben la misma utilidad $b_{ik} = b_{jk}$ en cada $k \in M$. Por la ecuación (3.9) sabemos que para cualquier coalición $N \setminus \{i, j\}$ tenemos que

$$v^{\kappa}(S \cup \{i\}) = v^{\kappa}(S \cup \{j\}).$$

  Note que los jugadores i y j son jugadores sustitutos en el juego v^{κ}, y como el valor de Shapley satisface el axioma de simetría, tenemos que

$$Sh_i(v^{\kappa}) = Sh_j(v^{\kappa}). \tag{3.68}$$

  Por lo tanto, la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^{\kappa}))$ satisface uniformidad.

- **Monotonía:**

  Supongamos que existen dos jugadores $i, j \in N$ tal que la utilidad del jugador i siempre es mayor o igual que la utilidad del jugador j, es decir, $b_{ih} \geq b_{jh},$ para toda $h \in M$.

  Con esta desigualdad podemos afirmar que en el juego cooperativo dado por la ecuación (3.9), la contribución marginal del jugador i siempre es mayor o igual que la contribución marginal del jugador j para cualquier coalición $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$, es decir,

$$v^{\kappa}(S \cup \{i\}) \geq v^{\kappa}(S \cup \{j\}). \tag{3.69}$$

  Y como el valor de Shapley calcula el promedio de las contribuciones marginales, el resultado $Sh_i(v^{\kappa}) \geq Sh_j(v^{\kappa})$ es inmediato.

  Por lo tanto, la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^{\kappa}))$ satisface monotonía.

- **Congruencia:**

Tenemos que el juego cooperativo (3.9), asociado a B, lo resolveremos mediante el valor de Shapley. Reescribamos dicho valor, dado por (3.12), de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Sh_i(v^\kappa) &= \underbrace{\frac{1}{n}[v^\kappa(\{i\}) - v^\kappa(\emptyset)]}_{a} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{\substack{S \subseteq N \setminus \{i\} \\ S \neq \emptyset}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v^\kappa(S \cup \{i\}) - v^\kappa(S)]}_{b}, \text{ para todo } i \in N. \end{aligned} \tag{3.70}$$

El resultado del término (a) está dado por:

$$\frac{1}{n}[v^\kappa(\{i\})] = \frac{1}{n}\left(\max_{j \in M}\{b_{ij}\}\right) \geq \frac{1}{n}\left(\min_{j \in M}\{b_{ij}\}\right), \text{ para todo } i \in N. \tag{3.71}$$

Ahora, para el término (b), analicemos cuál puede ser la contribución marginal de un jugador $i \in N$ a una coalición $S \subseteq N$. Consideremos $T = (S \cup \{i\})$ y veamos los siguientes casos:

- En el caso extremo de que $v^\kappa(T) = \sum_{i \in T} \min_{j \in M}\{b_{ij}\}$, entonces

$$[v^\kappa(T) - v^\kappa(S)] = [v^\kappa(S \cup \{i\}) - v^\kappa(S)] = \min_{j \in M}\{b_{ij}\}.$$

- En el caso extremo de que $v^\kappa(T) = \sum_{i \in T} \max_{j \in M}\{b_{ij}\}$ entonces,

$$[v^\kappa(T) - v^\kappa(S)] = [v^\kappa(S \cup \{i\}) - v^\kappa(S)] = \max_{j \in M}\{b_{ij}\}.$$

- En el caso de que $\sum_{i \in T} \min_{j \in M}\{b_{ij}\} < v^\kappa(T) < \sum_{i \in T} \max_{j \in M}\{b_{ij}\}$ entonces,

$$\min_{j \in M}\{b_{ij}\} \leq [v^\kappa(T) - v^\kappa(S)] = [v^\kappa(S \cup \{i\}) - v^\kappa(S)] \leq \max_{j \in M}\{b_{ij}\}.$$

Con lo anterior afirmamos que para toda coalición $S \subseteq N$ y para todo jugador $i \in N$, tenemos que:

$$\min_{j \in M}\{b_{ij}\} \leq [v^\kappa(S \cup \{i\}) - v^\kappa(S)] \leq \max_{j \in M}\{b_{ij}\}. \tag{3.72}$$

Y como el valor de Shapley calcula el promedio de las contribuciones marginales, el resultado $\min_{j \in M}\{b_{ij}\} \leq Sh_i(v^\kappa) \leq \max_{j \in M}\{b_{ij}\}$, para todo $i \in N$ es inmediato.

Por lo tanto, la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^\kappa))$ satisface congruencia.

- **Invarianza por jugadores:**

  Supongamos que $\mathcal{B} = P_\pi B$ es un PDMPJ de B (ver definición (3.21)). Note que si $\kappa \in \mathcal{M}^B(N)$ entonces $\kappa \in \mathcal{M}^{\mathcal{B}}(N)$. Luego, el juego cooperativo $\hat{v}^\kappa : 2^N \to \mathbb{R}$ asociado a $\mathcal{B}$, está dado por:

$$\hat{v}^\kappa(T) = \begin{cases} \max\limits_{j\in M}\{\sum\limits_{i\in T}\beta_{ij}\} & si \quad T \subsetneq N, \\ \sum\limits_{i\in N}\beta_{i\kappa} & si \quad T = N, \end{cases} \tag{3.73}$$

  donde $T \subseteq N$. Además, su SDSO es $\varphi(\mathcal{B}) = (\kappa, Sh(\hat{v}^\kappa))$.

  Consideremos $\mathcal{M}^B(S)$ el conjunto de opciones socialmente óptimas para cualquier subconjunto $S \subseteq N$ en B y $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}(T)$ el conjunto de opciones socialmente óptimas para cualquier subconjunto $T \subseteq N$ en $\mathcal{B}$.

  Ahora, sabemos que para cada $S \subseteq N$ en B, existe una opción $j \in \mathcal{M}^B(S)$ tal que esa misma $j \in \mathcal{M}^{\mathcal{B}}(T)$ para alguna $T \subseteq N$ en $\mathcal{B}$. Además, si $i \in S$ entonces $\pi(i) \in T$ y, por tanto, podemos afirmar que

$$\hat{v}^\kappa(T) = (\pi v^\kappa)(S) = v^\kappa(\pi(S)). \tag{3.74}$$

  Luego, como el valor de Shapley satisface el axioma de simetría, tenemos que

$$Sh(\hat{v}^\kappa) = Sh(\pi v^\kappa) = \pi(Sh(v^\kappa)), \tag{3.75}$$

  es decir,

$$Sh_i(\hat{v}^\kappa) = Sh_i(\pi v^\kappa) = (Sh^\kappa_{\pi(i)}(v^\kappa)). \tag{3.76}$$

  Por lo tanto, la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^\kappa))$ satisface invarianza por jugadores.

- **Invarianza por opciones:**

  Supongamos que $\hat{\mathcal{B}} = BP_\sigma$ es un PDMPO de B. Consideremos $\lambda \in \mathcal{M}^{\hat{\mathcal{B}}}(N)$ tal que $\sigma^{-1}(\lambda) = \kappa$ donde $\kappa \in \mathcal{M}^B(N)$. Luego, el juego cooperativo $\hat{v}^\lambda : 2^N \to \mathbb{R}$ asociado a $\hat{\mathcal{B}}$, está dado por:

$$\hat{v}^\lambda(T) = \begin{cases} \max\limits_{j\in M}\{\sum\limits_{i\in T}\beta_{ij}\} & si \quad T \subsetneq N, \\ \sum\limits_{i\in S}\beta_{i\lambda} & si \quad T = N, \end{cases} \tag{3.77}$$

donde $T \subseteq N$. Además, su SDSO es $\varphi(\mathcal{B}) = (\lambda, Sh(\hat{v}^{\lambda}))$.

Consideremos $\mathcal{M}^{B}(S)$ el conjunto de opciones socialmente óptimas para cualquier subconjunto $S \subseteq N$ en B y $\mathcal{M}^{\hat{\mathcal{B}}}(T)$ el conjunto de opciones socialmente óptimas para cualquier subconjunto $T \subseteq N$ en $\hat{\mathcal{B}}$.

Ahora, sabemos que para cada $T \subseteq N$ en $\hat{\mathcal{B}}$, existe una opción $j \in \mathcal{M}^{\hat{\mathcal{B}}}(T)$ tal que $\sigma^{-1}(j) = k$, donde $k \in \mathcal{M}^{B}(S)$ para cada $S = T \subseteq N$ en B. Por tanto, podemos afirmar que

$$\hat{v}^{\lambda}(T) = v^{\kappa}(S), \text{ para toda } S = T \subseteq N. \tag{3.78}$$

Es decir, $\hat{v}^{\lambda} = v^{\kappa}$ y por tanto el resultado $Sh(\hat{v}^{\lambda}) = Sh(v^{\kappa})$ es inmediato.

Por lo tanto, la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^{\kappa}))$ satisface invarianza por opciones.

- **Razonabilidad:**

  Consideremos un jugador no indiferente $i \in N$ tal que la opción socialmente óptima $\kappa \in \mathcal{M}^{B}(\{i\}) \cap \mathcal{M}^{B}(N)$ y como B es no trivial, entonces existe algún jugador $k \in N$, $k \neq i$, tal que $\mathcal{M}^{B}(\{k\}) \cap \mathcal{M}^{B}(N) = \emptyset$.

  Ahora, el juego cooperativo (3.9), asociado a B, lo resolveremos mediante el valor de Shapley, dado por la ecuación (3.12).

  Por el axioma de congruencia 3.20, sabemos que

$$\min_{h\in M}\{b_{jh}\} \leq Sh_j(v^{\kappa}) \leq \max_{h\in M}\{b_{jh}\}, \text{ para todo } j \in N. \tag{3.79}$$

  Además, note que la valía de cualquier coalición $S \subseteq N$ está dada por:

$$\sum_{j\in S}\min_{h\in M}\{b_{jh}\} \leq v^{\kappa}(S) \leq \sum_{j\in S}\max_{h\in M}\{b_{jh}\}. \tag{3.80}$$

  Por tanto, la contribución marginal del jugador no indiferente i, a una coalición $S \subseteq N$, con $i \in S$ es:

$$\min_{h\in M}\{b_{ih}\} \leq [v^{\kappa}(S) - v^{\kappa}(S \setminus \{i\})] \leq \max_{h\in M}\{b_{ih}\} = b_{i\kappa}. \tag{3.81}$$

  Ahora, como $\kappa \in M^{B}(\{i\})$ y $\kappa \notin M^{B}(\{k\})$, esto implica que al menos para la gran coalición N, tenemos que

$$\sum_{j\in N}\min_{h\in M}\{b_{jh}\} \leq v^{\kappa}(N) < \sum_{j\in N}\max_{h\in M}\{b_{jh}\}. \tag{3.82}$$

Lo cual implica que la contribución marginal del jugador no indiferente i a la gran coalición es:

$$\min_{h\in M}\{b_{ih}\} \leq [v^{\kappa}(N) - v^{\kappa}(N\setminus\{i\})] < \max_{h\in M}\{b_{ih}\} = b_{i\kappa}. \tag{3.83}$$

Por lo anterior, podemos afirmar que

$$\min_{h\in M}\{b_{ih}\} \leq Sh_i(v^{\kappa}) < b_{i\kappa}, \tag{3.84}$$

y por lo tanto, $Sh_i(v^{\kappa}) - b_{i\kappa} < 0$.

Por lo tanto, la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^{\kappa}))$ satisface razonabilidad.

- **Consecuente:**

  Consideremos $B \in \mathbb{B}$ no trivial y dos jugadores $j, k \in N$ tal que la opción socialmente óptima $\kappa \in \mathcal{M}^B(\{j\}) \cap \mathcal{M}^B(\{k\})$. Además, supongamos que κ es más beneficiosa para el jugador j que para el jugador k, i.e.,

$$b_{j\kappa} - b_{jh} > b_{k\kappa} - b_{kh}, \tag{3.85}$$

  para toda $h, \kappa \in M$, $h \neq \kappa$.

  Sabemos que el juego cooperativo (3.9) asociado a B lo resolveremos mediante el valor de Shapley, dado por la ecuación (3.12). Además, sabemos que la contribución marginal de un jugador $i \in N$ a cualquier coalición $S \subseteq N$ tal que $i \in S$ es:

$$v^{\kappa}(S) - v^{\kappa}(S\setminus\{i\}). \tag{3.86}$$

  Note que para toda coalición $S \subseteq N$ tenemos que

$$v^{\kappa}(S) \leq \sum_{i\in S} v^{\kappa}(\{i\}) \tag{3.87}$$

  y, por tanto, la contribución marginal de un jugador i a una coalición S estaría dada por:

$$v^{\kappa}(S) - v^{\kappa}(S\setminus\{i\}) \leq v^{\kappa}(\{i\}) = b_{i\kappa}. \tag{3.88}$$

Por el axioma de razonabilidad 3.23, sabemos que, si B es un juego no trivial, entonces el pago de todo jugador i tal que $\kappa \in \mathcal{M}^B(\{i\})$ será menor a su valía individual $v^\kappa(\{i\})$, es decir, al valor $b_{i\kappa}$.

Ahora, podemos obtener la utilidad que deja de recibir el jugador i en cada coalición $S \subseteq N \setminus \{i\}$, si a cada término del valor de Shapley le restamos de forma proporcional el valor $b_{i\kappa}$. Esto es:

$$\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\left[v^\kappa(S \cup \{i\}) - v^\kappa(S)\right] - \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[b_{i\kappa}]. \tag{3.89}$$

Denotemos esta diferencia mediante $\Delta_i(S)$. Factorizando tendríamos:

$$\Delta_i(S) = \frac{s!(n-s-1)!}{n!}\left[v^\kappa(S \cup \{i\}) - v^\kappa(S) - b_{i\kappa}\right]. \tag{3.90}$$

Note que

- Para toda $S \subset N \setminus \{i\}$ tal que $v^\kappa(S)$ es aditiva, tendríamos que $\Delta_i(S) = 0$.
- Para toda $S \subset N \setminus \{i\}$ tal que $v^\kappa(S)$ es no aditiva, tendríamos que $\Delta_i(S) \leq 0$.

Ahora, analicemos qué sucede para los jugadores j y k. Por hipótesis sabemos que $\kappa \in \mathcal{M}^B(\{j\}) \cap \mathcal{M}^B(\{k\})$ y por tanto, siempre se satisface la desigualdad estricta de la ecuación (3.85). Entonces, para toda coalición $S \subseteq N \setminus \{j,k\}$ tenemos que:

- Si $[v^\kappa(S \cup \{j\}) - v^\kappa(S) - b_{j\kappa}] = [v^\kappa(S \cup \{k\}) - v^\kappa(S) - b_{k\kappa}]$ entonces

  $$\Delta_j(S) = \Delta_k(S).$$

  Además, si $v^\kappa(S)$ es aditiva, entonces

  $$\Delta_j(S) = \Delta_k(S) = 0;$$

  en caso contrario,

  $$\Delta_j(S) = \Delta_k(S) \leq 0.$$

- Si $[v^\kappa(S \cup \{j,k\}) - v^\kappa(S \cup \{k\}) - b_{j\kappa}] = [v^\kappa(S \cup \{j,k\}) - v^\kappa(S \cup \{j\}) - b_{k\kappa}]$ entonces

  $$\Delta_j(S \cup \{k\}) = \Delta_k(S \cup \{j\}).$$

Además, si $v^{\kappa}(S)$ es aditiva, entonces

$$\Delta_j(S \cup \{k\}) = \Delta_k(S \cup \{j\}) = 0;$$

en caso contrario,

$$\Delta_j(S \cup \{k\}) = \Delta_k(S \cup \{j\}) \leq 0.$$

- Si $[v^{\kappa}(S \cup \{j\}) - v^{\kappa}(S) - b_{j\kappa}] < [v^{\kappa}(S \cup \{k\}) - v^{\kappa}(S) - b_{k\kappa}]$ entonces

$$\Delta_j(S) < \Delta_k(S).$$

- Si $[v^{\kappa}(S \cup \{j,k\}) - v^{\kappa}(S \cup \{k\}) - b_{j\kappa}] < [v^{\kappa}(S \cup \{j,k\}) - v^{\kappa}(S \cup \{j\}) - b_{k\kappa}]$ entonces

$$\Delta_j(S \cup \{k\}) < \Delta_k(S \cup \{j\}).$$

- Por la desigualdad (3.85), nunca se tendrá la desigualdad mayor estricta.

Por todo lo anterior, podemos afirmar que

$$\sum_{S \subseteq N \setminus \{j\}} \Delta_j(S) \ \leq \sum_{S \subseteq N \setminus \{k\}} \Delta_k(S). \tag{3.91}$$

En general, si $\kappa \in \mathcal{M}^B(\{i\})$ para algún jugador $i \in N$, entonces la utilidad que deja de recibir está dada por:

$$Sh_i(v^{\kappa}) - b_{i\kappa} = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \Delta_i(S). \tag{3.92}$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.91) y (3.92) tenemos que:

$$Sh_j(v^{\kappa}) - b_{j\kappa} \leq Sh_k(v^{\kappa}) - b_{k\kappa}. \tag{3.93}$$

Por lo tanto, la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^{\kappa}))$ satisface la propiedad consecuente.

- **Equidad:**

Consideremos $B \in \mathbb{B}$ un PDMP de tamaño $n \times n$. Por la definición 3.27, podemos afirmar que para cualquier par de jugadores $i, k \in N$ tenemos que $\mathcal{M}(\{i\}) \neq \mathcal{M}(\{k\})$, es decir, para cada jugador i existe una opción j individualmente óptima, diferente para cada uno. Además, en todas las demás opciones $h \in M$, con $h \neq j$, su utilidad es $b_{ih} = b_{ij} - \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+$, de tal forma que:

$$\sum_{i \in N} b_{i1} = \sum_{i \in N} b_{i2} = \cdots = \sum_{i \in N} b_{in}. \tag{3.94}$$

Por la definición 3.17, tenemos que $\mathcal{M}(N) = M$, es decir, todas las opciones son socialmente indiferentes y por tanto κ es cualquier opción en M.

Luego, el juego cooperativo (3.9) lo podemos reescribir como:

$$v^{\kappa}(S) = \max_{k \in M}\{\sum_{i \in S} b_{ik}\}, \text{ para toda } S \subseteq N. \tag{3.95}$$

Ahora, el valor de Shapley dado por (3.12), lo podemos reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Sh_i(v^{\kappa}) \quad = \quad & \underbrace{\frac{1}{n}[v^{\kappa}(\{i\}) - v^{\kappa}(\emptyset)]}_{a} & (3.96) \\ & \underbrace{+ \sum_{\substack{S \subsetneq N \setminus \{i\} \\ S \neq \emptyset}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v^{\kappa}(S \cup \{i\}) - v^{\kappa}(S)]}_{b}, \text{ para todo } i \in N. \end{aligned}$$

Por hipótesis, sabemos que existe una opción j individualmente óptima para cada jugador i; lo cual implica que el resultado del término a, está dado por:

$$\frac{1}{n}(\max_{k \in M}\{b_{ik}\}) = \frac{1}{n}(b_{ij}) = \frac{1}{n}(b_{ih} + \alpha) = \frac{1}{n}(b_{ih}) + \frac{\alpha}{n}, \text{ para todo } i \in N. \tag{3.97}$$

Ahora, para el término b, es fácil ver que para toda coalición $S \neq \emptyset$ y para todo jugador $i \in N$, tenemos que:

$$[v^{\kappa}(S \cup \{i\}) - v^{\kappa}(S)] = \min_{k \in M}\{b_{ik}\} = (b_{ih}). \tag{3.98}$$

Por la ecuación (3.97), sabemos que para $S = \emptyset$, tenemos:

$$\frac{1}{n}[v^{\kappa}(\{i\}) - v^{\kappa}(\emptyset)] = \frac{1}{n}(b_{ih}) + \frac{\alpha}{n}, \text{ para todo } i \in N. \tag{3.99}$$

Por tanto, podemos reescribir la expresión (3.96), unificando los resultados obtenidos en las ecuaciones (3.98) y (3.99) de la siguiente manera:

$$Sh_i(v^{\kappa}) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v^{\kappa}(S \cup \{i\}) - v^{\kappa}(S)] + \frac{\alpha}{n}. \tag{3.100}$$

Note que el resultado de la sumatoria es b_{ih} para todo jugador $i \in N$. Entonces,

$$Sh_i(v^\kappa) = b_{ih} + \frac{\alpha}{n}. \tag{3.101}$$

Por lo tanto, la solución $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^\kappa))$ satisface equidad.

$\square$

Ejemplo 3.9. *Consideremos la situación del ejemplo 2.5 modelada mediante la siguiente matriz* $B \in \mathbb{M}_{3\times 3}$

$$B = \begin{pmatrix} 300 & 700 & 500 \\ 800 & 600 & 200 \\ 500 & 800 & 1000 \end{pmatrix},$$

donde el conjunto de jugadores y de opciones son:
$N = (Alejandra(1), Ricardo(2), Lucía(3))$ *y*
$M = (azul(1), roja(2), verde(3))$.

Luego, $\mathcal{M}^B(N) = 2$, *es decir, la ruta roja es la opción socialmente óptima, cuya función característica está dada en la tabla 3.5.*

S	$v^2(S)$
$\{1\}$	700
$\{2\}$	800
$\{3\}$	1,000
$\{1,2\}$	1,300
$\{1,3\}$	1,500
$\{2,3\}$	1,400
$\{1,2,3\}$	2,100

Tabla 3.5: *Función característica (ejemplo 2.5) para la SDSO.*

Luego, la SDSO es $\varphi^B = \left(2, \left(\frac{1900}{3}, \frac{1900}{3}, \frac{2500}{3}\right)\right)$.

3.9. Solución de incentivos y compensaciones óptimas

3.9.1. Modelación de la solución (SICO)

Definición 3.29. *Diremos que $\Phi^j \in \mathbb{R}^n$ es un **vector de incentivos y compensaciones**, donde cada entrada Φ_i^j denotará el incentivo que recibirá el jugador i, o la compensación que tendría que dar el jugador i, si se eligiera una opción $j \in M$.*

Definición 3.30. *Una **solución indirecta** es una función $\phi : \mathbb{B} \to M \times \mathbb{R}^n$. Entendemos que para cada $B \in \mathbb{B}$, $\phi(B) = (k, \Phi^k(B))$, donde $k \in M$ corresponderá a la opción elegida por los jugadores y $\Phi^k(B) \in \mathbb{R}^n$ corresponderá al vector de incentivos y compensaciones de los jugadores, siendo $\Phi_i^k(B)$ el incentivo o la compensación correspondiente al jugador $i \in N$.*

Para encontrar el vector de incentivos y compensaciones, podemos asociar un juego cooperativo $u^j : 2^N \to \mathbb{R}$ a B de la siguiente manera:

Para cada $S \subseteq N$ y para cada $j \in M$, tendríamos

$$u^j(S) = \begin{cases} (\max\limits_{k \in D}\{\sum\limits_{i \in S} b_{ik}\}) - (\sum\limits_{i \in S} b_{ij}) & si \quad S \subsetneq N, \\ 0 & si \quad S = N. \end{cases} \tag{3.102}$$

Observación: Cada valía $u^j(S)$ representa el monto que dejan de recibir los jugadores en la coalición S si decidieran en conjunto la opción j, es decir, los jugadores deciden cooperar para formar la coalición S y aceptan una opción desfavorable para ellos, siempre y cuando se les pague la utilidad que dejan de recibir al no tomar su opción socialmente óptima.

Cada juego u^j lo resolveremos mediante el valor de Shapley y su respectivo vector solución lo denotaremos mediante $Sh(u^j)$.

Si $Sh_i(u^j) > 0$, significa que el jugador i recibirá ese incentivo por tomar la opción j; por el contrario, si $Sh_i(u^j) < 0$, significa que el jugador i debe destinar esa cantidad de su utilidad para compensar a algunos de los demás jugadores por tomar la opción j. Finalmente, si $Sh_i(u^j) = 0$, significa que el jugador i se llevará exactamente lo que él consiga al tomar la opción j.

Proposición 3.4. *Consideremos* $B \in \mathbb{B}$ *y* $u^1, u^2, ..., u^m$ *sus respectivos juegos cooperativos asociados. Si* $\mu \in \mathcal{M}^B(N)$ *es la opción socialmente óptima para los jugadores en* N*, entonces* $Sh(u^\mu)$ *es el vector de incentivos y compensaciones que maximiza las utilidades de los jugadores en* N*.*

Demostración:

Consideremos $B \in \mathbb{B}$. Para cada $j \in M$ asociaremos su respectivo juego cooperativo $u^j : 2^N \to \mathbb{R}$ dado por (3.102).

Por otra parte, para cada opción $j \in M$ vamos a considerar el siguiente juego aditivo:

$$\omega^j(S) = \sum_{i \in S} b_{ij} \text{ si } S \subseteq N. \tag{3.103}$$

Note que en cada juego ω^j, todos los jugadores son jugadores dummy, lo cual implica que el valor de Shapley de cada uno de estos juegos es la solución trivial $Sh_i(\omega^j) = B_{ij}$ para todo jugador $i \in N$.

Ahora, cada juego u^j lo podemos escribir, como el siguiente juego suma:

$$u^j = v^j - \omega^j, \tag{3.104}$$

donde cada v^j corresponde al juego cooperativo (3.9) definido para la SDSO. Como el valor de Shapley satisface linealidad, tenemos que:

$$Sh(u^j) = Sh(v^j) - Sh(\omega^j), \text{ para toda } j \in M. \tag{3.105}$$

Note que el valor $Sh(u^j)$ corresponde al vector de incentivos y compensaciones de los jugadores si deciden tomar la opción j.

Luego, si $\mu \in \mathcal{M}^B(N)$, por la proposición 3.1 podemos afirmar que $Sh(u^j)$ es el vector de incentivos y compensaciones que maximiza las utilidades de los jugadores en N.

$\square$

Definición 3.31. *Diremos que $\phi(B) = (\mu, Sh(u^\mu))$ es la **Solución de Incentivos y Compensaciones Óptimas (SICO)** para $B \in \mathbb{B}$, donde $\mu \in \mathcal{M}^B(N)$ y $Sh(u^\mu)$ es el vector solución del juego u^μ obtenido mediante el valor de Shapley.*

Proposición 3.5. *Consideremos $B \in \mathbb{B}$. Si $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^\kappa))$ es la Solución de Distribución Socialmente Óptima y $\phi(B) = (\mu, Sh(u^\mu))$ es la solución de Incentivos y Compensaciones Óptimas entonces $Sh_i(v^\kappa) = Sh_i(u^\mu) + b_{i\mu}$ para todo jugador $i \in N$ y toda opción $\kappa, \mu \in \mathcal{M}^B(N)$.*

Demostración:

Consideremos $B \in \mathbb{B}$. Por la proposición 3.1 y la definición 3.28, afirmamos que existe $\kappa \in \mathcal{M}^B(N)$ tal que $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^\kappa))$ es la SDSO. Recordemos que su juego cooperativo $v^\kappa : 2^N \to \mathbb{R}$ asociado, está dado por la ecuación (3.9) y su solución está dada por el valor de Shapley.

Además, por la proposición 3.4 y la definición 3.31, afirmamos que existe $\mu \in \mathcal{M}^B(N)$ tal que $\phi(B) = (\mu, Sh(u^\mu))$ es la SICO. Recordemos que su juego cooperativo $u^\mu : 2^N \to \mathbb{R}$ asociado, está dado por la ecuación (3.102) y su solución está dada por el valor de Shapley.

Ahora, consideremos el juego trivial $\omega^\mu : 2^N \to \mathbb{R}$ dado por:

$$\omega^\mu(S) = \sum_{i \in S} b_{i\mu} \quad \text{si} \quad S \subseteq N. \tag{3.106}$$

Note que el juego ω^μ es un juego aditivo y por tanto, todos los jugadores son jugadores dummy. Si lo resolvemos mediante el valor de Shapley, tendríamos que la solución es la solución trivial $Sh_i(\omega^\mu) = b_{i\mu}$ para todo jugador $i \in N$.

Ahora, como $\kappa, \mu \in \mathcal{M}^B(N)$, es fácil ver que el juego u^μ lo podemos reescribir como el siguiente juego suma:

$$u^\mu = v^\kappa - \omega^\mu, \tag{3.107}$$

y como el valor de Shapley satisface linealidad, tenemos que

$$Sh(u^\mu) = Sh(v^\kappa) - Sh(\omega^\mu). \tag{3.108}$$

Luego,

$$Sh(v^\kappa) = Sh(u^\mu) + Sh(\omega^\mu). \tag{3.109}$$

Finalmente, recordemos que la SICO nos da el vector de incentivos y compensaciones y para conocer el vector de pagos que recibirán los jugadores, debemos sumarle a cada entrada de dicho vector los valores $b_{i\mu}$, es decir, el vector $Sh(\omega^{\mu})$.

Por lo tanto, en las soluciones $\varphi(B)$ y $\phi(B)$ se satisface que $Sh_i(v^{\kappa}) = Sh_i(\omega^{\mu}) + b_{i\mu}$ para todo jugador $i \in N$.

$\square$

Ejemplo 3.10. *Retomando el ejemplo 3.9, teníamos que $\mathcal{M}^B(N) = \{2\}$, es decir, la ruta roja es la opción socialmente óptima, cuya función característica está dada en la tabla 3.6.*

S	$u^2(S)$
$\{1\}$	0
$\{2\}$	200
$\{3\}$	200
$\{1,2\}$	0
$\{1,3\}$	0
$\{2,3\}$	0
$\{1,2,3\}$	0

Tabla 3.6: *Función característica (ejemplo 2.5) para la SICO.*

Luego, la SICO es $\phi^B = \left(2, \left(-\frac{200}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)\right)$.

3.10. Solución Dual de Distribución Socialmente Óptima

3.10.1. Modelación de la solución (SDDSO)

Consideremos $B \in \mathbb{B}$. Podemos asociar un juego cooperativo $w^j : 2^N \to \mathbb{R}$ a B de la siguiente manera:

Para cada $S \subseteq N$ y para cada $j \in M$, tendríamos

$$w^j(S) = \sum_{i \in N} b_{ij} - \max_{k \in M} \left\{ \sum_{i \in N \setminus S} b_{ik} \right\} \quad \text{si} \quad S \subseteq N. \tag{3.110}$$

Observación: Este juego modela la situación desde un punto de vista pesimista donde los jugadores en conjunto deciden la opción j y la valía $w^j(S)$ representa el monto que queda o que falta para los jugadores en la coalición S si decidieran primero pagarles a los jugadores en $N \setminus S$ su utilidad máxima. Es decir, los juegos w^j son los juegos duales de los juegos v^j definidos en la ecuación (3.9).

Cada juego w^j lo resolveremos mediante el valor de Shapley y su respectivo vector solución lo denotaremos mediante $Sh(w^j)$.

Proposición 3.6. *Consideremos $B \in \mathbb{B}$ y $w^1, w^2, ..., w^m$ sus respectivos juegos cooperativos asociados. Si $\lambda \in \mathcal{M}^B(N)$ es una opción socialmente óptima para los jugadores en N, entonces $Sh_i(w^\lambda) \geq Sh_i(w^h)$ para todo jugador $i \in N$ y toda $h \neq \lambda \in M$.*

Demostración:

Consideremos $B \in \mathbb{B}$. Para cada $j \in M$ asociaremos su respectivo juego cooperativo $w^j : 2^N \to \mathbb{R}$ dado por la ecuación (3.110).

Note que en cada juego cooperativo w^j asociado a B, la valía de la gran coalición N está dada por

$$w^j(N) = \sum_{i \in N} b_{ij}, \tag{3.111}$$

y como $\lambda \in \mathcal{M}(N)$ es una **opción socialmente óptima,** tenemos que

$$w^\lambda(N) = w^h(N), \text{ para toda } h \in \mathcal{M}^B(N) \tag{3.112}$$

y

$$w^\lambda(N) > w^h(N), \text{ para toda } h \notin \mathcal{M}^B(N). \tag{3.113}$$

Ahora, cada juego w^j lo resolveremos mediante el valor de Shapley, el cual está dado por:

$$Sh_i(w^j) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} [w^j(S \cup \{i\}) - w^j(S)]. \tag{3.114}$$

Podemos reescribir la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Sh_i(w^j) &= \underbrace{\frac{1}{n}[w^j(\{i\}) - w^j(\emptyset)]}_{a} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{\substack{S\subseteq N\setminus\{i\} \\ S\neq\emptyset}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[w^j(S\cup\{i\}) - w^j(S)]}_{b}, \text{ para todo } i \in N. \end{aligned} \tag{3.115}$$

Por la igualdad (3.112) y la desigualdad (3.113), respectivamente, tenemos que para todo jugador $i \in N$, en el resultado del término a, siempre se satisface que:

$$w^\lambda(\{i\}) = w^h(\{i\}), \text{ para toda } h \in \mathcal{M}^B(N) \tag{3.116}$$

y

$$w^\lambda(\{i\}) > w^h(\{i\}), \text{ para toda } h \notin \mathcal{M}^B(N). \tag{3.117}$$

Y el resultado del término b, es el mismo para toda $j \in M$ ya que la contribución marginal del jugador i a una coalición $S \subseteq N \setminus \{i\}$, es la misma en todos los juegos w^j, es decir:

$$\left[w^\lambda(S\cup\{i\}) - w^\lambda(S)\right] = \left[w^h(S\cup\{i\}) - w^h(S)\right], \tag{3.118}$$

para toda $h, \lambda \in M$, $h \neq \lambda$.

Por lo anterior, los siguientes resultados son inmediatos:

$$Sh_i(w^\lambda) = Sh_i(w^h), \text{ para toda } h \in \mathcal{M}^B(N) \tag{3.119}$$

y

$$Sh_i(w^\lambda) > Sh_i(w^h), \text{ para toda } h \notin \mathcal{M}^B(N). \tag{3.120}$$

Por lo tanto, demostramos que la opción λ maximiza las utilidades de los jugadores es N.

□

Definición 3.32. *Diremos que* $\Gamma(B) = (\lambda, Sh(w^\lambda))$ *es la* ***Solución Dual de Distribución Socialmente Óptima (SDDSO)*** *para* $B \in \mathbb{B}$*, donde* $\lambda \in \mathcal{M}^B(N)$ *y* $Sh(w^\lambda)$ *es el vector solución del juego* w^λ *obtenido mediante el valor de Shapley.*

Proposición 3.7. *Consideremos* $B \in \mathbb{B}$*. Si* $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^\kappa))$ *es la Solución de Distribución Socialmente Óptima y* $\Gamma(B) = (\lambda, Sh(w^\lambda))$ *es la Solución Dual de Distribución Socialmente Óptima, entonces* $Sh_i(v^\kappa) = Sh_i(w^\lambda)$ *para todo jugador* $i \in N$ *y toda opción* $\kappa, \lambda \in \mathcal{M}^B(N)$*.*

Demostración:

Consideremos $B \in \mathbb{B}$. Por la proposición 3.1 y la definición 3.28, afirmamos que existe $\kappa \in \mathcal{M}^B(N)$ tal que $\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^\kappa))$ es la SDSO. Recordemos que su juego cooperativo $v^\kappa : 2^N \to \mathbb{R}$ asociado, está dado por la ecuación (3.9) y su solución está dada por el valor de Shapley.

Además, por la proposición 3.6 y la definición 3.32, afirmamos que existe $\lambda \in \mathcal{M}^B(N)$ tal que $\Gamma(B) = (\lambda, Sh(w^\lambda))$ es la SDDSO. Recordemos que su juego cooperativo $w^\lambda : 2^N \to \mathbb{R}$ asociado, está dado por la ecuación (3.110) y su solución está dada por el valor de Shapley.

Ahora, recordemos que el juego dual v^* de un juego $v \in G^n$, se define como:

$$v^*(S) = v(N) - v(N \setminus S), \text{ para toda } S \subseteq N. \tag{3.121}$$

Ahora, como $\kappa, \lambda \in \mathcal{M}^B(N)$ entonces

$$\sum_{i \in S} b_{i\kappa} = \sum_{i \in S} b_{i\lambda}.$$

Luego, es fácil ver que el juego w^λ es el juego dual de v^κ y como el valor de Shapley satisface que

$$Sh(v) = Sh(v^*),$$

afirmamos que

$$Sh_i(v^\kappa) = Sh_i(w^\lambda)$$

para todo jugador $i \in N$ y toda opción $\kappa, \lambda \in \mathcal{M}^B(N)$.

$\square$

Ejemplo 3.11. *Retomando el ejemplo (3.9), teníamos que $\mathcal{M}^B(N) = 2$, es decir, la ruta roja es la opción socialmente óptima, cuya función característica está dada en la tabla 3.7.*

S	$\omega^2(S)$
$\{1\}$	700
$\{2\}$	600
$\{3\}$	800
$\{1,2\}$	1,100
$\{1,3\}$	1,300
$\{2,3\}$	1,400
$\{1,2,3\}$	2100

Tabla 3.7: *Función característica (ejemplo 2.5) para la SDDSO.*

Luego, la SDDSO es $\gamma^B = \left(2, \left(\frac{1900}{3}, \frac{1900}{3}, \frac{2500}{3}\right)\right)$.

Conclusiones

En el presente trabajo, se estudiaron problemas de decisión multiagente (PDM) y se abordaron desde la teoría de juegos cooperativos. A continuación, se listan los resultados y aportaciones más relevantes de este trabajo:

- En primer lugar, se estudiaron los conceptos básicos y necesarios de la teoría de juegos cooperativos para poder abordar el problema de estudio. También se estudió el denominado valor de Shapley, uno de los resultados más importantes en la teoría de juegos cooperativos que ha sido utilizado como base para dar solución a muchos otros problemas; se estudiaron sus propiedades y un par de caracterizaciones alternas a dicho valor, que se usaron para dar solución a nuestro problema.

- Posteriormente, se realizó el planteamiento del problema, se propuso modelar los PDM mediante matrices de tamaño $n \times m$, donde los renglones representan los agentes, las columnas representan las opciones y cada entrada de la matriz representa la utilidad de un jugador al elegir una opción. Además, se propuso nueva notación para abordar esta clase de problemas y se expusieron tres ejemplos de situaciones relacionadas con dichos problemas.

- Se definieron los conceptos de solución directa y solución indirecta para los PDM, se mencionaron una serie de axiomas que puede satisfacer una solución y se plantearon tres maneras diferentes para abordar el problema desde el punto de vista de la teoría de juegos cooperativos; se propusieron tres formas de asociar un juego cooperativo a cada PDM, y además, se propuso que cada juego se resolvería mediante el valor de Shapley. De esta manera, se encontraron tres posibles soluciones; dos soluciones directas denominadas *La Solución de Distribución Socialmente Óptima (SDSO)* y *La*

Solución Dual de Distribución Socialmente Óptima (SDDSO); y una solución indirecta denominada, *La solución de Incentivos y Compensaciones Óptimas (SICO).*

- Se estudiaron las propiedades del valor de Shapley y se adaptaron a los problemas de decisión multiagente y de esta manera se propusieron diversas propiedades (axiomas) que puede satisfacer una solución.

- La solución directa SDSO arroja un resultado directo en el sentido que informa cuál es la opción que deben elegir los jugadores y cuál será la utilidad final de cada jugador. Se demostró que esta solución satisface los axiomas mencionados, reafirmando que es una solución "justa" para los jugadores involucrados en el PDM. Se dio una caracterización de la solución usando los axiomas de indiferencia, $k-$eficiencia y contribuciones balanceadas, demostrando que es la única solución que los satisface y, por último, se logró demostrar que dichos axiomas son independientes.

- La solución indirecta SICO arroja un resultado indirecto en el sentido de que el vector de pagos informa cuáles jugadores deben compensar, cuáles recibirán algún incentivo y cuáles se llevarán exactamente lo que consigan. Además, da información sobre cuáles serán esas cantidades. También se demostró que la opción socialmente óptima (la opción donde la utilidad en conjunto es mayor a cualquier otra), es la opción que maximiza las utilidades finales. Por último, se demuestra que al sumar o restar esas compensaciones e incentivos a lo que cada uno conseguía, los valores coinciden con la primera solución propuesta, la SDSO.

- La solución directa SDDSO se interpreta desde un punto de vista pesimista, la cual también arroja un resultado directo. Se demostró que esta solución y la SDSO son soluciones autoduales y, por tanto, coinciden.

- Por último, se logró demostrar la relación entre las tres soluciones, concluyendo que de alguna manera son "equivalentes", dado que la utilidad final que reciben los agentes coincide en las tres soluciones.

Finalmente, como trabajo futuro se propone tratar de abordar el problema desde el punto de vista de la teoría de juegos no cooperativos que permita encontrar equilibrios y de esta manera, todos los jugadores queden conformes con la solución.

Notación

Simbología

$\mathbb{N}$	—	Conjunto de números naturales
$\mathbb{R}$	—	Conjunto de números reales
$\emptyset$	—	Conjunto vacío
N	—	Conjunto de jugadores o agentes y/o gran coalición
M	—	Conjunto de decisiones
$\mathcal{I}$	—	Conjunto de jugadores indirefentes
h, i, j, k	—	Elementos de N o M
S, T	—	Coalición o subconjunto de jugadores
$\|N\| = n$	—	Cardinalidad del conjunto de jugadores
$\|S\| = s$	—	Cardinalidad de una coalición S
$\|T\| = t$	—	Cardinalidad de una coalición T
$\{i\}$	—	Coalición formada por solo un jugador
$\{i, j\}$	—	Coalición formada por dos jugadores
2^N	—	Conjunto de subconjuntos de N
v, u, w	—	Función de variable real sobre el conjunto potencia (juego cooperativo de utilidad transferible)
(N, v)	—	Juego cooperativo $n-$personal en forma de función característica
G^n	—	Conjunto de todos los juegos cooperativos
$v(S)$	—	Valía de una coalición S
$v(T)$	—	Valía de una coalición T
φ	—	Solución u operador de un juego (N, v)

$\varphi(v)$	— Vector de pagos de un juego v (vector en $\mathbb{R}^n$)
$\varphi_i(v)$	— Pago del jugador i
S_n	— Conjunto de permutaciones de N
σ	— Permutación del conjunto de opciones
π	— Permutación del conjunto de jugadores
P_σ	— Matriz de permutación
P_π	— Matriz de permutación
σv	— Juego permutado
$\varphi(\sigma v)$	— Vector de pagos de un juego permutado σv (vector en $\mathbb{R}^n$)
v^*	— Juego dual de un juego v
$Sh(v)$	— Valor de Shapley de un juego v (vector en $\mathbb{R}^n$)
$Sh_i(v)$	— Valor de shapley para el jugador i en un juego v
$v\|_{N\setminus\{k\}}$	— Juego restringido si se retira el jugador k
$\varphi_i(v\|_{N\setminus\{k\}})$	— Pago del jugador i en el juego restringido si se retira el jugador k
$S\setminus\{i\}$	— Coalición sin el jugador i
(T, v_T^φ)	— Juego reducido para $T \subset N$
$\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$	— Matrices de tamaño $n \times m$ con entradas de variable real
B	— Matriz asociada a un Problema de Decisión Multiagente
$\mathbb{B}$	— Conjunto de todos los problemas de decisión multiagente
b_{ij}, β_{ij}	— Entrada de una matriz B
$\varphi(B) = (k, \psi(B))$	— Solución directa a un Problema de Decisión Multiagente
$\varphi(B) = (k, \phi(B))$	— Solución directa a un Problema de Decisión Multiagente
$\psi(B), \phi(B)$	— Vector de pagos (vector en $\mathbb{R}^n$)
$\psi_i(B), \phi_i(B)$	— Utilidad del jugador i
$\mathcal{M}^B(S)$	— Conjunto de opciones socialmente óptimas para los jugadores en S
$\mathcal{M}^B(\{i\})$	— Conjunto de opciones individualmente óptimas para el jugador i
B^{-i}	— Matriz asociada a un Problema de Decisión Multiagente Reducido si se retira el jugador i
B_{-j}	— Matriz asociada a un Problema de Decisión Multiagente Reducido si se omite la opción j

B^S	—	Matriz asociada a un Subproblema de Decisión Multiagente
$\varphi(B^S) = (\hat{k}, \psi(B^S))$	—	Solución a un Subproblema de Decisión Multiagente
$\varphi'(B^S) = (\hat{k}, \phi(B^S))$	—	Solución a un Subproblema de Decisión Multiagente
B^{S-k}	—	Matriz asociada a un Subproblema de Decisión Multiagente reducido si se retira el jugador k
$\psi(B^{S-k})$	—	Vector de pagos del Subproblema de Decisión Multiagente reducido B^{S-k}
$\min\limits_{j\in M}\{b_{ij}\}$	—	Entrada mínima para el jugador i en una matriz B (utilidad mínima que puede obtener)
$\max\limits_{j\in M}\{b_{ij}\}$	—	Entrada máxima para el jugador i en un matriz B (utilidad máxima que puede obtener)
$\mathcal{B}$	—	Matriz asociada al Problema de Decisión Multiagente Permutado por Jugadores
$\hat{\mathcal{B}}$	—	Matriz asociada al Problema de Decisión Multiagente Permutado por Opciones
v^j, u^j, w^j	—	Juegos cooperativos asociados a una opción j
ω^j	—	Juego cooperativo aditivo asociado a una opción j
$\max\limits_{k\in M}\{\sum\limits_{i\in S} b_{ik}\}$	—	Utilidad máxima que pueden obtener en conjunto los jugadores de una coalición S
$\min\limits_{k\in M}\{\sum\limits_{i\in S} b_{ik}\}$	—	Utilidad mínima que pueden obtener en conjunto los jugadores de una coalición S
$Sh(v^j)$	—	Valor de shapley para un juego v^j
κ, μ, λ	—	Opciones socialmente óptimas
$\varphi(B) = (\kappa, Sh(v^\kappa))$	—	Solución de Distribución Socialmente Óptima para un Problema de Decisión Multiagente
$\mathcal{M}^{B^S}(N)$	—	Conjunto de opciones socialmente óptimas para los jugadores en N de un Subproblema de Decisión Multiagente
$\mathcal{M}^{B^{S-j}}(N \setminus \{j\})$	—	Conjunto de opciones socialmente óptimas para los jugadores en N de un Subproblema de Decisión Multiagente reducido si se retira el jugador j

$\varphi(B^S) = (\hat{\kappa}, Sh(v^{\hat{\kappa}}))$	—	Solución de Distribución Socialmente Óptima para un Subproblema de Decisión Multiagente
$\varphi(B^{S-k}) = (\lambda, Sh(\bar{v}^{\lambda}))$	—	Solución de Distribución Socialmente Óptima para un Subproblema de Decisión Multiagente reducido si se retira el jugador k
$\Delta_i(S)$	—	Utilidad que deja de recibir el jugador i en una coalición S
$\varphi_1(B) = (h, Sh(v'))$	—	Solución alterna para un Problema de Decisión Multiagente
$\varphi_2(B) = (k, Sh(u'))$	—	Solución alterna para un Problema de Decisión Multiagente
$\varphi_3(B) = (k, x)$	—	Solución alterna para un Problema de Decisión Multiagente
$\varphi_4(B) = (k, y)$	—	Solución alterna para un Problema de Decisión Multiagente
Φ^j	—	Vector de incentivos y compensaciones (vector en $\mathbb{R}^n$)
Φ_i^j	—	Incentivo o compensación del jugador i
$\phi(B) = (k, \Phi^k(B))$	—	Solución indirecta a un Problema de Decisión Multiagente
$\phi(B) = (\mu, Sh(u^{\mu}))$	—	Solución de Incentivos y Compensaciones Óptimas para un Problema de Decisión Multiagente
$\Gamma(B) = (\lambda, Sh(w^{\lambda}))$	—	Solución Dual de Distribución Socialmente Óptima para un Problema de Decisión Multiagente

Siglas

PDM	—	Problema de Decisión Multiagente
PDMR	—	Problema de Decisión Multiagente Reducido
SDM	—	Subproblema de Decisión Multiagente
PDMPJ	—	Problema de Decisión Multiagente Permutado por Jugadores
PDMPO	—	Problema de Decisión Multiagente Permutado por Opciones
PDMP	—	Problema de Decisión Multiagente Proporcional
SDSO	—	Solución de Distribución Socialmente Óptima
SICO	—	Solución de Incentivos y Compensaciones Óptimas
SDDSO	—	Solución Dual de Distribución Socialmente Óptima

Referencias

[1] Bazzan, A. L., Bordini, R. H., and Campbell, J. A. Evolution of agents with moral sentiments in an iterated prisoner's dilemma exercise. In *Game theory and decision theory in agent-based systems*. Springer, 2002, pp. 43–64.

[2] Bolger, E. M. A value for games with n players and r alternatives. *International Journal of Game Theory 22*, 4 (1993), 319–334.

[3] Bolger, E. M. A consistent value for games with n players and r alternatives. *International Journal of Game Theory 29*, 1 (2000), 93–99.

[4] Clarke, E. H. Multipart pricing of public goods. *Public choice* (1971), 17–33.

[5] Driessen, T., and Radzik, T. Consistency à la hart and mas-colell of efficient, linear, and symmetric values for tu-games.

[6] Driessen, T. S. *A new axiomatic characterization of the Shapley value.* Katholieke Universiteit Nijmegen. Mathematisch Instituut, 1983.

[7] Driessen, T. S. *Cooperative games, solutions and applications*, vol. 3. Springer Science & Business Media, 2013.

[8] Fiestras-Janeiro, M. G., García-Jurado, I., and Mosquera, M. A. Cooperative games and cost allocation problems. *Top 19*, 1 (2011), 1–22.

[9] Hart, S., and Mas-Colell, A. Potential, value, and consistency. *Econometrica 57*, 3 (1989), 589–614.

[10] Kalai, E., and Samet, D. On weighted shapley values. *International journal of game theory 16*, 3 (1987), 205–222.

[11] López, W. O., and Ponce, J. C. M. An index for agents on ordered pairs. *BEIO, Boletín de Estadística e Investigación Operativa 33*, 2 (2017), 108–125.

[12] Myerson, R. B. Graphs and cooperation in games. *Mathematics of operations research 2*, 3 (1977), 225–229.

[13] Myerson, R. B. Conference structures and fair allocation rules. *International Journal of Game Theory 9*, 3 (1980), 169–182.

[14] Navarro Ramos, A., et al. Soluciones axiomáticas para un problema de distribución de costos con consumo sin rivalidad. *REPOSITORIO NACIONAL CONACYT* (2015).

[15] Otten, G.-J. Characterizations of a game theoretical cost allocation method. *Zeitschrift für Operations Research 38*, 2 (1993), 175–185.

[16] Peters, H. *Game theory: A Multi-leveled approach.* Springer, 2015.

[17] Roth, A. E. *The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley.* Cambridge University Press, 1988.

[18] Sanchez, F. Balanced contributions axiom in the solution of cooperative games. *Games and Economic Behavior 20*, 2 (1997), 161–168.

[19] Shapley, L. A value for n-person games. *Contributions to the Theory of Games*, 28 (1953), 307–317.

[20] Sánchez-Pérez, J. Juegos cooperativos y sus aplicaciones económicas. *Perspectivas. Revista de Análisis de Economía, Comercio Y Negocios Internacionales* (2010), 59–75.

[21] Stone, P., and Veloso, M. Using decision tree confidence factors for multi-agent control. In *Proceedings of the second international conference on autonomous agents* (1998), pp. 86–91.

[22] TIJS, S. H., AND DRIESSEN, T. S. Game theory and cost allocation problems. *Management science 32*, 8 (1986), 1015–1028.

[23] VÁZQUEZ-BRAGE, M., VAN DEN NOUWELAND, A., AND GARCÍA-JURADO, I. Owen's coalitional value and aircraft landing fees. *Mathematical Social Sciences 34*, 3 (1997), 273–286.

[24] WINTER, E. The shapley value. *Handbook of game theory with economic applications 3* (2002), 2025–2054.