



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ



FACULTAD DE CIENCIAS

**PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO DE  
SIERPIŃSKI GENERALIZADO**

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRA EN CIENCIAS APLICADAS**

PRESENTA:

**MARICELA VIDAL RAMIREZ**

DIRECTOR(A) DE TESIS:

**DR. RAFAEL ALCARAZ BARRERA**

SAN LUIS POTOSÍ, SLP

MARZO A 2022

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ  
FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS:

“PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO DE  
SIERPIŃSKI GENERALIZADO”

ALUMNO:

MARICELA VIDAL RAMIREZ

COMITE QUE ACEPTA LA TESIS:

DR. RAFAEL ALCARAZ BARRERA      ASESOR \_\_\_\_\_

DR. EDGARDO UGALDE SALDAÑA      SINODAL \_\_\_\_\_

DR. FELIPE GARCIA RAMOS      SINODAL \_\_\_\_\_

DR. MAURICIO SALAZAR MÉNDEZ      SINODAL: \_\_\_\_\_

# Declaración autoría

Yo, Maricela Vidal Ramirez, estudiante del Posgrado en Ciencias Aplicadas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, como autor/(a) de la tesis “Propiedades del Triángulo de Sierpiński generalizado”, declaro que la tesis es una obra original, inédita, auténtica, personal, que se han citado las fuentes correspondientes y que en su ejecución se respetaron las disposiciones legales vigentes que protegen los derechos de autor y de propiedad intelectual e industrial. Las ideas, doctrinas, resultados y conclusiones a los que he llegado son de mi absoluta responsabilidad.

# Resumen

Durante nuestro trabajo, calculamos las dimensiones fractales de triángulos de Sierpiński generalizados. En particular, nos concentramos en estudiar la dimensión de Hausdorff y la dimensión por cajas de dichos conjuntos.

Para definir los triángulos de Sierpiński generalizados, usaremos contracciones de  $\mathbb{R}^2$ . En particular, analizamos que sucede cuando las imágenes de las funciones se traslapan. Nuestra investigación se centra en estudiar un sistema iterado de funciones donde el factor de contracción es un número multinacci. Dado que estos parámetros no cubren al intervalo  $(0, 1)$ , existen algunas preguntas abiertas para realizar una investigación posterior.

# Abstract

In this work we study the calculation of fractal dimension in the generalized Sierpinski triangle. The fractal dimensions we use are the Hausdorff dimension and the box dimension.

To define generalized Sierpinski triangles, we define functions by contraction with parameter in the interval  $(0,1)$ . We analyze what happens when the images of the functions overlap, in these cases we define parameters called multinacci numbers. However, these numbers do not cover the whole space (interval  $(0,1)$ ) leaving a study space.

# Agradecimientos

Mis agradecimientos a mi padre Norberto Vidal Dominguez (QEPD) por haberme apoyado durante mis años de estudio, su cariño y enseñanza. Agradezco al Dr. Rafael Alcaraz Barrera por la asesoría y dirección para el desarrollo de esta tesis. También agradezco a los Drs. Felipe Garcia-Ramos, Edgardo Ugalde Saldaña, Mauricio Salazar Méndez y César Israel Hernández Vélez por el apoyo en los avances de tesis y las correcciones de la misma.

Agradezco al CONACyT por el apoyo brindado durante 2 años por medio de la beca de maestría con CVU: 855360.

Por último, pero no menos importante agradezco a Luguís, por estar a mi lado en todo este tiempo y especialmente en el momento más difícil por el que he pasado. Quiero agradecer su amor, cariño, paciencia que me ha dado.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>6</b>
1.1. Topología . . . . .	6
1.2. Teoría de la medida . . . . .	11
1.2.1. Medida de Hausdorff . . . . .	14
1.3. Sistemas Iterados de funciones . . . . .	16
<b>2. Dimensión Topológica y Dimensiones Fractales</b>	<b>23</b>
2.1. Dimensión topológica . . . . .	23
2.2. Dimensión de Hausdorff . . . . .	26
2.3. Dimensión por cajas . . . . .	31
2.4. Condición del conjunto abierto . . . . .	36
<b>3. Triángulo de Sierpiński con valores especiales</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>

# Índice de figuras

1.1. Conjunto de Cantor Ternario . . . . .	18
1.2. Primera Iteración del Ejemplo 1.3.5 . . . . .	19
1.3. Segunda Iteración del Ejemplo 1.3.5 . . . . .	20
2.1. Intersección entre $T_1, T_2, T_3$ . . . . .	25
2.2. $S_2$ del Triángulo de Sierpiński. $d((\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{4}, 0)) = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ . . . . .	26
2.3. Gráfica de $\mathcal{H}(F)$ . . . . .	27
2.4. Expansión de intervalos $C_k$ del Conjunto de Cantor Ternario . . . . .	29
2.5. Primera Cubierta de $S_{\frac{1}{2}}$ . . . . .	35
2.6. Segunda Cubierta de $S_{\frac{1}{2}}$ . . . . .	35
2.7. Triángulo de Sierpiński después de 100 iteraciones . . . . .	36
2.8. Primeros dos dígitos de $S_{\frac{1}{2}}$ . . . . .	38
2.9. Los triángulos grises representan las superposiciones en la primera interacción y los vértices de los triángulos que son las superposiciones . . . . .	39
2.10. Conjunto de Cantor después de 6 iteraciones . . . . .	40
2.11. Parámetros de $\lambda \in (0, 1)$ que representan donde se cumple la condición del conjunto abierto. . . . .	41
2.12. Triángulos Radiales . . . . .	43
2.13. Triángulo de Sierpiński generado por $\lambda_* \approx 0,6478$ . Solo se observan los agujeros radiales. . . . .	44
2.14. Triángulo de Sierpiński con $\lambda = 0,6478$ . . . . .	45
2.15. Acercamiento a el Triángulo de Sierpiński con $\lambda = 0,6478$ . . . . .	45
3.1. Sierpiński $\omega_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . . . . .	47
3.2. Triángulo de Sierpiński cuando $\lambda = 0,62$ . . . . .	50
3.3. Geometría del Triángulo de Sierpiński $m = 2$ . . . . .	51
3.4. Geometría del Triángulo de Sierpiński $m = 3$ . . . . .	52
3.5. Dimensión de Hausdorff para $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ (líneacontinua), números de multinacci (círculos) y $\lambda \in (\frac{2}{3}, 1)$ (líneacon *). . . . .	54
3.6. Dimensión de Hausdorff para $\omega_2, \omega_3$ (círculos) y $\lambda \in (\frac{2}{3}, 1)$ (líneacon *). . . . .	55



# Introducción

En matemáticas en ocasiones queremos relacionar un “objeto” con un número que indique su “tamaño”. Pero para esto debemos tener cuidado en como queremos relacionar dicho número con su “tamaño”, si imaginamos una bola de radio 1 este tiene un volumen finito pero área y longitud infinitas. Así, necesitamos conceptos un poco más avanzados, como lo es la dimensión. Por ejemplo, un punto tiene dimensión 0, las curvas tiene dimensión 1, las superficies dimensión 2 y los solidos tienen dimensión 3. Incluso usando la dimensión puede resultar difícil por lo que usamos distintos métodos de dimensión dependiendo el objeto (que conoceremos como conjuntos). Las dimensiones mas conocidas y que nos ayudarán son: dimensión Topológica, dimensión de Hausdorff y dimensión por cajas.

Las dimensiones de Hausdorff y por cajas nos ayudan a calcular la dimensión de conjuntos que son auto-similares. Los conjuntos auto-similares, son conjuntos que tienen copias idénticas en si mismas

Durante nuestro trabajo, estudiaremos la familia de *triángulos de Sierpiński generalizados* introducida por Broomhead, Montaldi y Sidorov en [1]. Quizá el Triángulo de Sierpiński usual es uno de los conjuntos *fractales* mas conocidos, el cual se genera utilizando un *sistema iterado de funciones* definido en  $\mathbb{R}^2$  utilizando tres contracciones con factor de contracción igual a  $\frac{1}{2}$ .

En general, un *sistema iterado de funciones* consiste en una familia finita, o bien numerable, de funciones  $f_i$  definidas del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  en si mismo [7, pág 83],[3, pág 123]. Durante nuestro trabajo, consideraremos sólo sistemas iterados de funciones dados por *contracciones*. Es decir, transformaciones tales que la distancia entre la imagen de dos puntos siempre es menor o igual que un factor  $\lambda$  (al cual llamaremos factor de contracción) por la distancia original entre dos puntos [2, pág 54].

Es un resultado conocido (ver [3, Teorema 9.3, pág. 130]) que, dado un sistema iterado de funciones  $\{f_i\}_{i=0}^n$  finito o numerable (i.e.  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) donde todas las funciones son contracciones, existe un único conjunto compacto  $\Lambda$ , invariante bajo la dinámica de este sistema iterado de funciones; es decir,

$$\Lambda = \bigcup_{i=0}^n f_i(\Lambda) := F(\Lambda).$$

Al conjunto  $\Lambda$  lo llamamos *el atractor del sistema iterado de funciones*  $\{f_i\}$ .

Consideremos el triángulo equilátero con vértices

$$p_0 = (0, 0), \quad p_1 = (1, 0) \quad \text{y} \quad p_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

al cuál denotamos por  $\Delta$ . Además, consideraremos el sistema iterado de funciones  $f_0, f_1, f_2$  donde:

$$f_0(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)p_0, \quad f_1(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)p_1, \quad \text{y} \quad f_2(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)p_2,$$

con  $\lambda \in (0, 1)$ . Notemos que  $f_i$  es una contracción para toda  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Con este sistema iterado de funciones generaremos Triángulos de Sierpiński diferentes al usual, es decir el caso  $\lambda = \frac{1}{2}$ . El sistema iterado de funciones para dichos triángulos esta dado por las funciones  $f_0, f_1$ , y  $f_2$  con factor de contracción  $\lambda$ . A los conjuntos atractores generados por este sistema iterado de funciones los llamaremos *triángulos de Sierpiński generalizados*.

Por otro lado, no es difícil mostrar que

$$\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n \quad \text{donde} \quad \Delta_n := \bigcup_{i=0}^2 f_i(\Delta_{n-1})$$

y

$$\Delta_0 := \Delta \text{ es el triángulo equilátero con vértices } p_0, p_1 \text{ y } p_2.$$

En muchos casos, decimos que el atractor de un sistema iterado de funciones  $\Lambda$  es un *conjunto fractal*. En general, no existe una definición general de que significa que un conjunto sea un fractal.

Durante nuestro trabajo llamaremos a un conjunto  $\Lambda$  un *fractal* si:

- Si  $\Lambda$  satisface que su dimensión de Hausdorff supera estrictamente a su dimensión topológica, o bien;
- $\Lambda$  tiene dimensión de Hausdorff no entera.

Las nociones de dimensión topológica y dimensión de Hausdorff las explicaremos en el Capítulo 2.

Dos ejemplos de conjuntos fractales muy conocidos que satisfacen la definición que utilizaremos son el triángulo de Sierpiński usual en  $\mathbb{R}^2$  y el conjunto de Cantor Ternario definido en  $\mathbb{R}$ . Ambos conjuntos son construidos con sistemas iterados de funciones donde todas las funciones son contracciones (ver Ejemplo 1.3.2). Hablaremos de este par de ejemplos frecuentemente,

Un problema relevante en *geometría fractal* es determinar la dimensión de Hausdorff de un conjunto. No es complicado demostrar que la dimensión de Hausdorff del intervalo

unitario es 1 y la dimensión de Hausdorff de una bola cerrada en  $\mathbb{R}^n$  es  $n$  [3, pág 95]. Por otro lado, calcular la dimensión de Hausdorff de un subconjunto compacto arbitrario de  $\mathbb{R}^n$  es, en general, un problema complicado. De hecho, este problema es aun complicado para conjuntos atractores generados por sistemas iterados de funciones. No obstante, si un sistema iterado de funciones  $\{f_i\}$  satisface la *condición del conjunto abierto* y todas las funciones son contracciones, es sencillo calcular su dimensión como veremos en el Capítulo 2.4. La condición del conjunto abierto (ver Definición 2.4.4) intuitivamente nos garantiza que en el conjunto atractor no existen traslapes significativos entre las imágenes de cada una de las funciones del sistema iterado de funciones. Por ejemplo, en el triángulo de Sierpiński usual, las intersecciones entre las imágenes de  $\Delta$  bajo  $f_i$  es una cantidad finita de puntos como se observa en la Figura 1.2 para  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Al iterar el sistema, observamos que dichas intersecciones son sólomente una cantidad numerable de puntos.

Por otro lado, cuando un sistema iterado de funciones no satisface la condición del conjunto abierto calcular la dimensión de Hausdorff del conjunto atractor no es un problema sencillo.

El objetivo de este trabajo es calcular de manera explícita la dimensión de Hausdorff de ciertos Triángulos de Sierpiński generalizados cuando las contracciones  $f_i$  tienen el mismo factor de contracción  $\lambda \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ . Es en estos casos, que la condición del conjunto abierto **no se cumple**. En particular, calcularemos la dimensión de Hausdorff de  $\Lambda$  cuando el factor de contracción es un *número de multinacci*. Decimos que  $\omega_m$  es *número de multinacci* si  $\omega_m$  es la raíz positiva más pequeña del polinomio

$$x^m + x^{m-1} + \cdots + x = 1$$

donde  $m \geq 2$ . En el caso  $m = 2$ ,  $\omega_2$  es *la razón áurea*.

Notemos que cuando  $\lambda \geq \frac{1}{2}$  empiezan a haber traslapes significativos en el atractor  $\Lambda$ , es decir,

$$f_i(\Delta) \cap f_j(\Delta) \neq \emptyset$$

para cada  $i \neq j$ . De hecho, si  $\lambda > \frac{1}{2}$ ,  $f_i(\Delta) \cap f_j(\Delta)$  tiene interior no vacío para toda  $i \neq j$ . Por ejemplo, sean  $\lambda = 0.54$  y funciones  $f_i : \mathbb{R}^2$  con  $i = 0, 1, 2$  definidas como

$$f_0(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)p_0, \quad f_1(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)p_1, \quad f_2(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)p_2,$$

se cumple que:

$$f_i(\mathcal{O}) \cap f_j(\mathcal{O}) \neq \emptyset \quad \text{para toda } i \neq j.$$

donde  $\mathcal{O}$  es el interior de  $\Delta$ . Más aún, estas intersecciones forman tres triángulos (ver Figura 2.9). En general, los casos en donde el sistema iterado de funciones no se cumple la condición del conjunto abierto es en  $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ .

Demostremos en la Proposición 2.4.17 que cuando  $\lambda_* \approx 0.6478$  donde  $\lambda_*$  es la raíz positiva mas pequeña del polinomio  $x^3 - x^2 + x = \frac{1}{2}$ , el triángulo de Sierpiński generalizado

correspondiente al factor de contracción  $\lambda_*$  tiene interior no vacío (ver (2.4.16)). De hecho, esto es válido para toda  $\lambda > \lambda_*$ .

Una de las herramientas que utilizaremos en nuestra investigación es la noción de *codificación*. En la familia de triángulos de Sierpiński, una *codificación* o *palabra* es una sucesión infinita o finita de dígitos del conjunto  $\{0, 1, 2\}$  que nos indica el orden en que se aplican las funciones  $f_i$  en los puntos de  $\Delta_0$ . Por ejemplo, la palabra 01 nos indica que primero aplicaremos la función  $f_1$  y luego  $f_0$  a un punto  $x \in \Delta_0$ , es decir  $f_{01} = f_0 \circ f_1$ . En el caso del Triángulo de Sierpiński usual, cada punto  $x \in \Lambda$  tiene una única codificación, salvo en los puntos donde su imagen bajo las funciones  $f_i$  son iguales, el cual es un conjunto numerable. Algunos de estos casos son:

$$f_0(p_2) = f_2(p_0), \quad f_2(p_1) = f_1(p_2), \quad f_0(p_1) = f_1(p_0)$$

en la primera iteración;

$$f_0(f_0(p_2)) = f_0(f_2(p_0))$$

en la segunda, etc. Notemos que en el caso anterior volvimos aplicar  $f_0$ , entonces la palabra sería 00 o 02. Denotaremos como  $\mathcal{U}$  a *el conjunto de unicidad*; es decir, el conjunto que contiene a todos los  $x \in \Lambda$  que tienen codificación única.

Como mencionamos anteriormente, la condición de conjunto abierto no se cumple en los sistemas iterados de funciones con factor de contracción  $\lambda > \frac{1}{2}$ . Construiremos un sistema iterado de funciones, en este caso, numerable que el sistema iterado de funciones **satisface la condición del conjunto abierto**. Para construir dicho sistema, utilizaremos la geometría de los triángulos de Sierpiński parametrizados por números de multinacci  $\omega_n$  con  $n \geq 2$  (véase Capítulo 3). En cada uno de estos casos generaremos dos conjuntos; el *conjunto de unicidad*  $\mathcal{U}$  y definiremos un conjunto  $\mathcal{A}_{\omega_m}$ , donde  $\mathcal{A}_{\omega_m}$  es el atractor del sistema iterado de funciones infinito que construiremos. Por otro lado, usaremos el conjunto  $\mathcal{U}'$  el cual es el límite de la sucesión de uniones de figuras geométricas obtenidas usando la geometría del triángulo de Sierpiński. Sabiendo que la dimensión de Hausdorff de dos conjuntos en  $\mathbb{R}^n$  es el máximo de la dimensión de Hausdorff de estos dos conjuntos y aplicando el resultado obtenido en la Proposición 2.3.1 concluiremos que se puede calcular la dimensión de Hausdorff en estos casos.

La organización de este trabajo es de la siguiente manera: En el Capítulo 1 definimos un concepto el cual es de importancia para el desarrollo del trabajo; *la medida de Hausdorff*. Ya que es necesaria para más adelante desarrollar la *dimensión de Hausdorff*. También definimos formalmente el concepto de *Sistema iterado de funciones*. Además, definiremos el *valor de similitud* de un sistema iterado de funciones en (1.11) y lo calcularemos de manera explícita para el conjunto de Cantor y el Triángulo de Sierpiński usual. Un resultado de importancia es el Teorema 1.3.10, donde mostraremos la existencia y unicidad del conjunto atractor de un sistema iterado de funciones.

En el Capítulo 2, introduciremos brevemente la dimensión de Hausdorff y la dimensión Topológica para la familia del Triángulo de Sierpiński generalizado parametrizado por  $\lambda \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ . Dos resultados de importancia son acerca de la dimensión de Hausdorff y la dimensión por cajas en las Proposiciones 2.2.8 y 2.3.1. En estas proposición demostramos que

$$\dim_H(A \cup B) = \text{máx} \{ \dim_H(A), \dim_H(B) \} \text{ y } \overline{\dim}_B \left( \bigcup_{i=1}^k Z_i \right) = \text{máx} \{ \overline{\dim}_B Z_i | i = 1, \dots, k \}$$

donde  $\dim_H$  representa la dimensión de Hausdorff y  $\overline{\dim}_B$  representa la dimensión de cajas superior. Estos resultados nos ayudarán en el Capítulo 3 para demostrar el Teorema 3.0.4 que nos auxiliará a calcular la dimensión de Hausdorff de los triángulos de Sierpiński generalizados donde su factor de contracción es un número de multinacci. Al final del Capítulo 2 mostraremos una tabla que compara la dimensión topológica, Hausdorff y por cajas, de diferentes conjuntos.

En la Sección 2.4 del Capítulo 2, definimos la familia de Triángulos de Sierpiński generalizados utilizando un sistema iterado de funciones que depende de un factor de contracción  $\lambda \in (0, 1)$ . Además, definiremos la condición del conjunto abierto y daremos algunos ejemplos de sistemas iterados de funciones donde se satisface la condición del conjunto abierto, así como algunos ejemplos donde no se satisface. Además, un resultado fundamental para el desarrollo del trabajo es el Teorema 2.4.5 El Teorema 2.4.5 compara la dimensión de Hausdorff y el valor de autosimilitud, y nos da la intuición de que el problema es complicado.

En el Capítulo 3 demostraremos el Teorema 3.0.9 que es el principal de la tesis, cuyo enunciado es el siguiente: *El conjunto de unicidad,  $\mathcal{U}_{\omega_m}$ , es un conjunto auto-similar con la dimensión de Hausdorff.*

$$\dim_H(\mathcal{U}_{\omega_m}) = \frac{\log \sigma_m}{\omega_m}$$

donde  $\sigma_m$  es la raíz entera positiva más pequeña de  $2t^3 - 3t + 1$ .

Para calcular la dimensión de Hausdorff de un triángulo de Sierpiński generalizado parametrizado por un número de multinacci  $\omega_m$  mostraremos el Teorema 3.0.8. En este resultado, construimos un conjunto de codificaciones únicas en un triángulo de Sierpiński generalizado utilizando un sistema iterado de funciones infinito. Usando el Teorema 3.0.4 y la teoría desarrollada por Mauldin y Urbański en [5] vamos a mostrar nuestro resultado principal.

Concluimos este trabajo mostrando algunas tablas y gráficas que nos permiten observar los parámetros  $\lambda$  y  $\omega_m$  donde se conoce la dimensión de Hausdorff del triángulo de Sierpiński asociado. Además, en dichas gráficas observamos el comportamiento de la dimensión de Hausdorff respecto a los valores de  $\lambda$ , aunque este realmente no se conoce en casos más generales. Las imágenes que ilustra la tesis se crearon usando programas en *Geogebra* y *Octave*.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo explicaremos algunos conceptos básicos de Topología, Teoría de la medida y definiremos la noción de *Sistema Iterado de Funciones*. Estos son los conceptos necesarios para desarrollar este trabajo.

### 1.1. Topología

Desarrollaremos nuestro trabajo en *espacios métricos*, a los cuales denotaremos por  $(X, d)$ . En particular, trabajaremos en el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^2$ . Recordemos que un *espacio métrico* es un par  $(X, d)$  donde  $X$  es un conjunto y  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  es una función que cumple las siguientes propiedades:

1.  $d(x, y) \geq 0$  para cualesquiera  $x, y \in X$  y  $d(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$ ;
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  para cualesquiera  $x, y \in X$ ;
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , para cualquiera  $x, y, z \in X$ .

A la función  $d$  la llamamos una *métrica* o una *distancia para  $X$* .

Sea  $X$  un espacio métrico y  $A \subset X$ . Definimos la *cerradura* de  $A$  como

$$\text{cl}(A) = \{x \in X : \text{para todo } V(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

donde  $V(x)$  es una vecindad de  $x$ . Notemos que  $A \subset \text{cl}(A)$ , para todo  $A \subset X$ . Recordemos que dado un espacio métrico  $X$  y  $A \subset X$ , si  $A$  es cerrado entonces  $\text{cl}(A) = A$  [4, pág. 61]. Por otro lado, definimos el *diámetro de  $A$*  denotado por  $\text{diám}(A)$ , como

$$\text{diám}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\};$$

y la *distancia de  $x \in X$  al conjunto  $A$*  como

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Una *sucesión de elementos de  $X$*  es una función

$$\begin{aligned} x : \mathbb{N} &\rightarrow X; \\ n &\rightarrow x(n). \end{aligned}$$

Habitualmente, una sucesión se representa como  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , donde  $x_n = x(n)$ .

Sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de elementos de un espacio métrico  $X$ . Entonces, decimos que:

- $x_n$  *converge* a  $x$  en  $X$ , denotado como  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ , si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq M$ , se cumple que  $d(x_n, x) < \varepsilon$ .
- Decimos que una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de elementos de  $X$  es una *sucesión de Cauchy* si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ , para todo  $n, m \geq M$ .

Un espacio métrico  $(X, d)$  es *completo* si toda sucesión de Cauchy  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de elementos de  $X$  es convergente en  $X$ . En particular,  $\mathbb{R}^2$  es un espacio métrico completo con la métrica usual. Una *subsucesión* de  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión que está contenida en la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Una colección  $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  de subconjuntos de un espacio  $X$  es una *cubierta abierta de  $X$* , si

$$X \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha,$$

y  $U_\alpha$  es un subconjunto abierto para toda  $\alpha \in I$ . Si  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  es también una cubierta abierta de  $X$ , llamaremos a  $\mathcal{B}$  una *subcubierta* de  $\mathcal{A}$ .

Recordemos que un espacio métrico  $(X, d)$  es *compacto* si para cualquier cubierta abierta  $\mathcal{A}$  de  $X$  existe una subcubierta finita de subconjuntos, es decir, existen  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{A}$  tales que  $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ . Dado  $\delta > 0$ , si para toda  $\alpha \in I$ ,  $\text{diám}(U_\alpha) \leq \delta$ , decimos que  $\mathcal{A}$  es una  *$\delta$ -cubierta abierta de  $X$* .

Sean  $(X, d)$  y  $(Y, d')$  dos espacios métricos. Sea  $x_0 \in X$  y una función  $f : X \rightarrow Y$ . Decimos que  $f$  es *continua en el punto  $x_0$*  si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $d(x, x_0) < \delta$  entonces  $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ . Decimos que  $f$  es *continua en  $X$*  si es  $f$  continua para todo  $x \in X$ .

Durante nuestro trabajo, utilizaremos algunas funciones continuas particulares. Decimos que una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es:

- una *contracción*, si existe  $r \in (0, 1)$  tal que para todo  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , se cumple:

$$d(f(x), f(y)) \leq r \cdot d(x, y);$$

- una *similitud*, si existe  $r > 0$  tal que  $d(f(x), f(y)) = r \cdot d(x, y)$ ;

- una *dilatación*, si  $f(x) = r \cdot x + (1 - r) \cdot a$  con  $a \in \mathbb{R}$  para algún  $r > 0$ . Al punto  $a$  lo llamamos el *centro* de dilatación de  $f_r$  y a  $r$  lo llamamos *radio* de  $f$ .

Observemos que tanto las contracciones como las dilataciones son similitudes.

**Ejemplo 1.1.1.** Consideremos las funciones  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x \quad \text{y} \quad f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Sean  $x, y \in \mathbb{R}$ . Observemos que

$$d(f_1(x), f_1(y)) = d\left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y\right) = \frac{1}{3}d(x, y);$$

$$d(f_2(x), f_2(y)) = d\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}d(x, y).$$

Entonces  $f_1$  y  $f_2$  son similitudes. Además,  $f_1$  y  $f_2$  son dilataciones, dado que si  $r = \frac{1}{3}$  entonces:

$$f_1(x) = f_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot 0$$

$$f_2(x) = f_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot 1.$$

Recordemos que dado un conjunto  $X$ , el *conjunto potencia* de  $X$  está definido como

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}.$$

Dado un subconjunto  $A$  de  $X$  y  $\varepsilon > 0$ , definimos la *nube con radio  $\varepsilon$  y centro en  $A$*  como

$$N_\varepsilon(A) = N(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}.$$

Consideraremos las siguientes clases de subconjuntos de un espacio métrico  $(X, d)$ . Definimos:

$$Cl(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ es cerrado}\};$$

$$2^X = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ es compacto y } A \neq \emptyset\}.$$

A un subconjunto de  $\mathcal{P}(X)$  con alguna propiedad topológica dada lo llamaremos un *hiperespacio* de  $X$ . En particular, los subconjuntos  $2^X$  y  $Cl(X)$  son hiperespacios.

Consideremos  $H_d : 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$  dada por

$$H_d(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}. \quad (1.1)$$

**Proposición 1.1.2.** *La función  $H_d$  es una métrica para  $2^X$ .*



*Demostración.* Por la definición de  $H_d$  se cumple  $H_d(A, B) \geq 0$ . Además, claramente  $H_d(A, B) = H_d(B, A)$  y  $H_d(A, A) = 0$ . Supongamos que  $H_d(A, B) = 0$ . Entonces,

$$A \subset N(\varepsilon, B),$$

para todo  $\varepsilon > 0$ .

Sea  $p \in A$ . Entonces, existe una sucesión  $b_n \in X$  convergente a  $p$  tal que  $d(p, b_n) \leq \frac{1}{n}$ . Dado que  $B$  es compacto (los conjuntos compactos son cerrados), podemos afirmar que  $p \in B$ . Por lo tanto  $A \subset B$ . De manera análoga se muestra que  $B \subset A$ . Por lo tanto  $A = B$ .

Mostraremos que

$$H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$$

para todo  $A, B, C \in 2^X$ . Sean  $A, B, C \in 2^X$  y  $\varepsilon > 0$ . Si  $a \in A$ , entonces, existe  $b \in B$  tal que

$$d(a, b) \leq H_d(A, B) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Además, existe  $c \in C$  tal que

$$d(b, c) \leq H_d(B, C) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De esta manera,  $a$  está contenido en la  $\varepsilon'$  vecindad de  $C$ , donde

$$\varepsilon' = H_d(A, B) + H_d(B, C) + \varepsilon.$$

De manera similar se muestra que  $C$  está contenido en la  $\varepsilon'$ -vecindad de  $A$ . Por lo tanto,

$$H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) + \varepsilon,$$

lo cual se cumple para todo  $\varepsilon > 0$ . Así,

$$H_d(A, C) < H_d(A, B) + H_d(B, C),$$

y podemos concluir que  $H_d$  es una métrica. □

A la función  $H_d$  la llamamos *la métrica de Hausdorff en  $2^X$* .

Sea  $X$  un espacio métrico. Decimos que un subconjunto  $A$  de  $X$  es una  $\varepsilon$ -red para  $X$  si dado  $\varepsilon > 0$ , para cada  $x \in X$  existe  $a \in A$  tal que  $d(x, a) < \varepsilon$ . Si para cada  $\varepsilon > 0$  existe una  $\varepsilon$ -red finita  $B$  contenida en  $X$  decimos que  $X$  es un conjunto *totalmente acotado*. Por otro lado, decimos que un espacio métrico  $X$  es *compacto por sucesiones*, si toda sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$  tiene una subsucesión convergente en  $X$ . Recordemos que un punto  $x \in X$  es un *punto de acumulación* de un conjunto  $A \subset X$  si cualquier vecindad  $V(x)$  de  $x$ ,  $V(x)$  interseca a  $A$  en algún punto distinto de  $x$ , es decir,  $(V(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ . Un conjunto  $A$  es *numerablemente compacto* si cualquier  $F \subset A$  finito tiene un punto de acumulación. Si  $A$  es numerablemente compacto entonces es compacto.

Mostraremos que dado un espacio métrico completo  $(X, d)$  entonces  $(2^X, H_d)$  es un espacio métrico completo. Para ello necesitamos el siguiente resultado cuya demostración se encuentra en [2, pág.59]

**Lema 1.1.3.** *Sea  $X$  un espacio métrico. Si  $X$  es compacto por sucesiones entonces para toda  $\varepsilon > 0$  existe una  $\varepsilon$ -red finita.*

**Proposición 1.1.4.** *Si  $(X, d)$  es un espacio métrico completo entonces  $(2^X, H_d)$  es un espacio métrico completo.*

*Demostración.* Sea  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de Cauchy en  $2^X$ . Definimos

$$\mathcal{A} = \{x \in X : \text{existe } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ tal que } x_n \in A_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y } x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x\} \quad (1.2)$$

Mostraremos que:

1.  $A_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{A}$ , y
2.  $\mathcal{A} \in 2^X$ , es decir,  $\mathcal{A}$  es un subconjunto compacto y no vacío de  $X$ .

Primero mostraremos 1. Sea  $\varepsilon > 0$ . Dado que  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para  $n, m \geq N$ ,  $H_d(A_n, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Fijemos  $n \geq N$ . Si  $x \in \mathcal{A}$  entonces existe una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $x_n \in A_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ . Luego, existe  $K \in \mathbb{N}$  tal que  $k \geq K$  y  $d(x_k, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Observemos que si  $k \geq N$ , entonces  $H_d(A_k, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , es decir, existe  $y \in A_n$  tal que

$$d(x_n, x_k) \leq d(y, x_k) + d(x_k, x) < \varepsilon.$$

Por lo tanto  $\mathcal{A} \subset N(\varepsilon, A_k)$ .

Ahora mostraremos que  $A_n \subset N(\varepsilon, \mathcal{A})$  para toda  $n \geq N$ . Fijemos  $n \geq N$  como hicimos anteriormente. Sean  $y \in A_n$  y  $k \in \mathbb{N}$  tales que  $k_1 = n$  y  $H_d(A_k, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$  para todo  $m > k_j$ . Definimos una sucesión  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ , con  $y_k \in A_k$  como sigue: para  $k < n$ ,  $y_k \in A_k$  cualquier punto. Sea  $y_n = y$ . Ahora procedemos de manera inductiva. Si  $y_{k_j} \in A_{k_j}$  ha sido definido y  $k_j < k < k_{j+1}$  consideramos  $y_k \in A_k$  tal que  $d(y_{k_j}, y_k) < \frac{\varepsilon}{2^j}$ . Observemos que  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy. Como  $(X, d)$  es un espacio métrico completo existe  $x \in X$  tal que  $y_k \rightarrow x$  esto implica que  $x \in \mathcal{A}$  y  $d(y, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(y, y_k) < \varepsilon$ . Así  $A_n \subset N(\varepsilon, \mathcal{A})$ . Por lo tanto  $A_n \rightarrow \mathcal{A}$ .

Ahora mostraremos 2. Tomando cualquier  $\varepsilon > 0$ , digamos  $\varepsilon = 1$  notemos que  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ . Probemos que  $\mathcal{A}$  es cerrado, es decir,  $\mathcal{A} = Cl(\mathcal{A})$ . Sabemos que  $\mathcal{A} \subset Cl(\mathcal{A})$ . Sea  $x \in Cl(\mathcal{A})$ . Para probar que  $Cl(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$  debemos construir una sucesión  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $z_n \in A_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y que  $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ , es decir,  $x$  satisface (1.2). Entonces,  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$  tal que  $d(y_n, x) < \frac{1}{2^n}$ . Ahora, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $z_n \in A_n$  tal que

$$d(z_n, y_n) < H_d(A_n, A) + \frac{1}{2^n}.$$

De aquí se obtiene que,

$$d(z_n, x) < d(z_n, y_n) + d(y_n, x) < H_d(A_n, A) + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

Entonces  $d(z_n, x) \rightarrow 0$ , es decir  $z_n \rightarrow x$ . Por lo tanto  $x \in \mathcal{A}$ .

Finalmente, mostraremos que  $\mathcal{A}$  es compacto en  $2^X$ . Afirmamos que para todo  $\varepsilon > 0$  existe una  $\varepsilon$ -red finita en  $\mathcal{A}$  usando el Lema 1.1.3 esto implica que  $\mathcal{A}$  es compacto en  $2^X$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Sabemos que  $A_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{A}$ . Tomemos  $n \in \mathbb{N}$  tal que:

$$H_d(A_n, \mathcal{A}) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.3)$$

Dado que  $A_n \in 2^X$ ,  $A_n$  es compacto por sucesiones. Entonces existe  $\{y_1 \cdots y_n\}$  una  $\varepsilon$ -red finita en  $A_n$ . Para cada  $y_i \in \{y_1 \cdots y_n\}$  existe  $x_j \in A$  tal que  $d(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ . Sea  $x \in A$ . Por (1.3) existe  $z \in A_n$  tal que  $d(x, z) < \frac{\varepsilon}{3}$  y  $d(z, y) < \frac{\varepsilon}{3}$ . Luego,

$$d(x_i, x_j) \leq d(x, z) + d(z, y_i) + d(y_i, x_j) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Por tanto  $\{x_1 \cdots x_n\}$  es una  $\varepsilon$ -red finita en  $A$ .

Sea  $F \subset \mathcal{A}$  infinito, y  $B = \{b_1, \dots, b_k\}$  una  $\frac{1}{2}$ -red finita en  $\mathcal{A}$ . Entonces dada  $b_i \in B$  existe una infinidad de  $x \in F$  tales que  $d(x, b_i) < \frac{1}{2}$ . Sea  $F_1 = \{x \in F : d(x, b_i) < \frac{1}{2}\}$ . Notemos que  $\text{diám}(F_1) = 1$ . Dado que para todo  $x, y \in F_1$ ,  $d(x, y) \leq d(x, b_i) + d(b_i, y) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ . Podemos construir  $F_2 \subset F_1$  tal que  $F_2$  es infinito y  $\text{diám}(F_2) < \frac{1}{2}$ . Entonces, podemos construir una sucesión  $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$  tal que  $F_{i+1} \subset F_i \subset \cdots \subset F_1 \subset F$  y  $\text{diám}(F_i) = \frac{1}{2^i}$ . Tomemos  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  tal que  $x_i \in F_i$  para toda  $i \in \mathbb{N}$ . Fijemos  $j \in \mathbb{N}$  y sea  $k > j$ . Entonces,  $d(x_j, x_k) < \frac{1}{2^j}$ . Por lo tanto,  $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy. Sea  $\varepsilon > 0$ . Entonces existe  $j$  tal que  $\frac{1}{2^j} < \varepsilon$ . Sean  $m, n > j$ , notemos que para toda  $m, n > j$ , se cumple  $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^j} < \varepsilon$ .

Por lo tanto existe  $x$  tal que  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ . Además,  $x \in \mathcal{A}$  dado que  $\mathcal{A}$  es cerrado. Entonces  $F$  tiene un punto de acumulación en  $A$ . Por lo tanto,  $\mathcal{A}$  es numerablemente compacto y por ende  $\mathcal{A}$  es compacto. Así,  $2^X$  es completo.  $\square$

Dado un conjunto  $X$  y  $\mathcal{A}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Decimos que una familia de subconjuntos  $\mathcal{B}$  refina a  $\mathcal{A}$  si para todo  $B \in \mathcal{B}$  existe un subconjunto  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $B \subset A$ . Decimos que un subconjunto  $A$  de  $X$  es *abierto-cerrado* si  $A$  es abierto y cerrado simultáneamente.

## 1.2. Teoría de la medida

Necesitamos algunos conceptos básicos de Teoría de la Medida para definir la noción de dimensión de Hausdorff que es fundamental en nuestro estudio. Una idea intuitiva de medida es una manera de atribuir un volumen a los conjuntos, de modo que si un conjunto  $A$  se descompone en un número finito o numerable de piezas de una manera razonable, entonces el volumen de  $A$  es la suma de los volúmenes de las piezas. Una manera de entender a una medida en el espacio  $\mathbb{R}$  es usando la longitud usual de un intervalo  $[a, b]$ . En  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^n$  podemos considerar el área y el volumen  $n$ -dimensional respectivamente.

Recordemos que una *medida exterior para un conjunto*  $X$  es una función  $\rho : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

- $\rho(\emptyset) = 0$ ,
- $\rho(E) \geq 0$  para todo  $E \subset X$ ,
- Sean  $E, F \subset X$  entonces  $\rho(E) \leq \rho(F)$ ,
- Si  $\{E_n\}$  es una sucesión de elementos de  $X$ . Entonces,  $\rho(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n)$ .

Si  $\rho(X) < \infty$  decimos que  $\rho$  es una *medida exterior finita*.

Recordemos que una clase no vacía de  $S \subset \mathcal{P}(X)$ , es una  $\sigma$ -álgebra si:

1.  $\emptyset \in S$  y  $X \in S$ ,
2. si  $A \in S$  entonces  $X \setminus A \in S$ ,
3. si  $\{A_n\}_n^{\infty}$  es una sucesión en  $S$  entonces  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$ .

Sea  $\mathcal{B}$  una colección de subconjuntos de  $X$  y sea  $\mathcal{A}$  la intersección de todas las  $\sigma$ -álgebras en  $X$  tales que  $\mathcal{B} \subset S$  que contiene a  $\mathcal{B}$ . Entonces  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra, la cual llamaremos la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{B}$ , y denotado por  $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ . De esta forma, si  $S$  es cualquier  $\sigma$ -álgebra en  $X$  que contiene a  $\mathcal{B}$ , entonces  $\mathcal{A}(\mathcal{B}) \subset S$ .

Dado un espacio métrico  $(X, d)$  definimos la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $X$  denotada por  $\mathcal{B}$  como la  $\sigma$ -álgebra generada por la colección de conjuntos (intervalos) abiertos. En otras palabras,

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}(\tau), \text{ donde } \tau = \{V \subset X : V \text{ es abierto.}\}$$

En particular, la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$ , denotada por  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , es la  $\sigma$ -álgebra más pequeña que contiene a todos los conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}$ . De hecho,  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  está generada por la clase de intervalos abiertos.

Recordemos que un *espacio medible* es una pareja  $(X, S)$  donde  $X \neq \emptyset$  y  $S$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$ .

Sea  $(X, S)$  un espacio medible. Una *medida en*  $(X, S)$  es una función  $\mu : S \rightarrow [0, \infty)$  con las siguientes propiedades:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
2. si  $A \subseteq B$  entonces  $\mu(A) \leq \mu(B)$ ,

3.  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva, es decir, si  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset S$  es una sucesión tal que sus elementos son disjuntos entre sí,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para toda  $i \neq j$  de  $S$ , entonces se cumple que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Llamamos a la terna  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  un *espacio de medida*, y a los conjuntos en  $\mathcal{S}$  los llamamos *conjuntos medibles*. Así definimos lo siguiente:

- si  $\mu(X) < \infty$ , decimos que la medida es *finita*.
- si  $\mu(X) = 1$ , el espacio de medida  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  lo llamamos *espacio de probabilidad*. Nos referiremos a la medida  $\mu$  como una *medida de probabilidad en  $X$* .
- si el conjunto  $X$  se puede descomponer como la unión numerable de subconjuntos de medida finita, decimos que la medida es  $\sigma$ -*finita*.

Veamos algunos ejemplos de medidas.

### Ejemplo 1.2.1.

1. Consideremos un conjunto  $X$ . Sea  $(X, S)$  donde  $S = \mathcal{P}(X)$ , y  $\mu : S \rightarrow [0, \infty)$  dada por

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & \text{si } A \text{ es finito;} \\ \infty & \text{si } A \text{ no es finito.} \end{cases} \quad (1.4)$$

La función  $\mu$  es una medida llamada *la medida de conteo* en  $X$ .

2. Sean  $(X, S)$  un espacio medible cualquiera y  $x_0 \in X$  fijo. Definimos  $\mu : S \rightarrow [0, 1]$  como:

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in A; \\ 0 & \text{si } x_0 \notin A. \end{cases}$$

$\mu$  es una medida finita conocida como la *medida unitaria concentrada en  $x_0$* .

3. Sea  $X = \mathbb{R}$  y  $S = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  entonces existe una única medida  $\bar{\lambda}$   $\sigma$ -finita definida sobre la  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $S$  y que asigna a cada intervalo su longitud. Por ejemplo en  $\mathbb{R}$ , tomando  $(a, b) \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{\lambda} = b - a$ .
4. Sean  $I_1, I_2, \dots, I_n$ ,  $n$  intervalos. Considerando el producto cartesiano de  $n$  intervalos, esto es de la forma

$$I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j \in I_j, j = 1, \dots, n\},$$

Llamaremos a este tipo de conjuntos rectángulos y la colección de todos los rectángulos que son acotados se denotarán por  $\mathcal{R}$ . La medida de estos rectángulos esta dada por

$$\lambda^*(I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n) = \bar{\lambda}(I_1) \times \bar{\lambda}(I_2) \dots \bar{\lambda}(I_n).$$

A esta medida se le conoce como *medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$* .

Observando la definición de medida exterior podemos notar que las primeras dos propiedades son exactamente las requeridas para medida. Sin embargo, la tercera propiedad de medida, es decir, la aditividad es remplazada por subaditividad de conjuntos numerables. Con esta diferencia se puede decir que la medida exterior es mas débil que la medida.

La siguiente clase de medidas nos será útil en el Capítulo 2.4. Una *distribución de masa*  $\mu$  en  $X$  es una medida exterior definida en  $X$  con  $0 < \mu(X) < \infty$ .

### 1.2.1. Medida de Hausdorff

Recordemos que el objetivo de definir medida en la sección anterior es para poder asignar un tamaño a conjuntos.

Carathéodory introdujo, partiendo de construcciones anteriores de Borel y Lebesgue, las más generales “medidas exteriores de Carathéodory”. En particular, definió la medida “1-dimensional” o “lineal” en el espacio euclídeano-dimensional, indicando que medidas  $s$ -dimensionales podían ser definidas de forma parecida para otros enteros  $s$ . Hausdorff señaló que la definición de Carathéodory también era válida para  $s$  no entero.

Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto. Recordemos que  $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es una  $\delta$ -cubierta abierta de  $F$  si  $\text{diám}(U_\alpha) \leq \delta$  para toda  $\alpha \in I$ . Consideremos una  $\delta$ -cubierta de  $f$  numerable. Sean  $s > 0$  y  $\delta > 0$ . Definimos

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(U_i)^s : \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } F \right\} \quad (1.5)$$

Observando que todas las cubiertas de  $F$  son conjuntos de diámetro como máximo  $\delta$  y buscando minimizar la suma de las  $s$ -ésimas potencias de  $\text{diám}(U_i)$  en la expresión (1.5). Entonces, a medida que  $\delta$  disminuye la cantidad de cubiertas permitidas para  $F$  en (1.5) es también disminuye. Por tanto, el ínfimo de  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  aumenta y se acerca a un límite cuando  $\delta \rightarrow 0$ , podemos observar que si  $\delta \rightarrow 0$ , las cubiertas permitidas de  $F$  en (1.5) se reduce. Por lo tanto, el ínfimo de  $\mathcal{H}_\delta^s$  aumenta, y así se aproxima a un límite cuando  $\delta \rightarrow 0$ .

Escribimos

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F). \quad (1.6)$$

El límite dado en (1.6) existe para cualquier subconjunto compacto  $F$  de  $\mathbb{R}^n$ . Al valor  $\mathcal{H}^s(F)$  lo llamamos la *medida  $s$ -dimensional de Hausdorff de  $F$* .

**Proposición 1.2.2.** *Sea  $X = \mathbb{R}^n$ . Entonces  $\mathcal{H}^s : 2^X \rightarrow [0, \infty)$  es una medida exterior para toda  $s \geq 0$ .*

*Demostración.* Fijemos  $s \geq 0$ . Es claro que  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ , ya que el  $\emptyset$  es una cubierta de si mismo con 0 elementos, entonces  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(U_i)^s = 0$ , por lo que  $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$  y cuando  $\delta \rightarrow 0$   $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ .

Consideremos a  $E, F \subset \mathbb{R}^n$  dos subconjuntos compactos tales que  $E \subset F$ . Mostremos que

$$\mathcal{H}^s(E) < \mathcal{H}^s(F).$$

Sean  $\delta > 0$  y  $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$  una  $\delta$ -cubierta de  $F$ . Puesto que;  $E \subset F$  entonces  $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$  también es una  $\delta$ -cubierta de  $E$ . Observemos que esto se cumple para toda  $\delta > 0$  y toda  $\delta$ -cubierta numerable.

Sea  $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$  una  $\delta$ -cubierta numerable de  $E$ . Entonces,

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(U_i)^s : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right\} \subset \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(V_i)^s : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \right\} \quad (1.7)$$

Dado que  $E \subset F$  y ambos son acotados, al calcular el ínfimo de (1.7) obtenemos  $\mathcal{H}_{\delta}^s(F) \geq \mathcal{H}_{\delta}^s(E)$  para todo  $\delta > 0$ .

Por último, mostraremos que dada una sucesión de subconjuntos  $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset 2^X$ , se cumple que

$$\mathcal{H}_{\delta}^s \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\delta}^s(E_i).$$

Sea  $\{V_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$   $\delta$ -cubierta de  $E_i$  con  $i \in \mathbb{N}$ . Notemos que,

$$\left\{ \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} : \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right\} \subset \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} \{V_{i,j}\} : \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i,j=1}^{\infty} V_{i,j} \right\}.$$

Por lo que tenemos

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(U_i)^s : \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right\} \subseteq \left\{ \sum_{i,j=1}^{\infty} \text{diám}(V_{i,j})^s : \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i,j=1}^{\infty} V_{i,j} \right\}$$

Ahora, para todo  $E_i$  y  $E_k$  distintos existen dos  $\delta$  cubiertas numerables  $\{V_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $\{V_{k,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ , respectivamente, tales que  $\{V_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}} \cap \{V_{k,j}\}_{j \in \mathbb{N}} \neq \emptyset$ . Sea  $V_{i,l} \in \{V_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}} \cap \{V_{k,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Notemos que  $\{V_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}} \setminus \{V_{i,l}\}$  puede dejar de ser  $\delta$  cubierta numerable de  $E_i$  pero  $E_i \cup E_k \subseteq (\bigcup_{j=1, j \neq l}^{\infty} V_{i,j}) \cup (\bigcup_{j=1}^{\infty} V_{k,j})$ . Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\text{diám}(V_{i,j})^s + \text{diám}(V_{k,j})^s) \geq \left[ \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diám}(V_{i,j})^s + \text{diám}(V_{k,j})^s) \right] - \text{diám}(V_{i,l})^s. \quad (1.8)$$

De (1.8) tenemos que

$$\mathcal{H}_{\delta}^s \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leq \mathcal{H}_{\delta}^s(E_i)$$

Cuando  $\delta \rightarrow 0$ , se tiene que  $\mathcal{H}^s \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leq \mathcal{H}^s(E_i)$ . Por lo tanto,  $\mathcal{H}^s$  es medida exterior.  $\square$

La medida de Hausdorff generaliza la idea familiar de tamaño, área y volumen en  $\mathbb{R}^n$ . Observemos que,  $s = 0$ , es la medida de conteo. Cuando tomamos  $s = 1$  es la longitud, y para  $s = n$  es proporcional a la medida de Lebesgue  $n$ -dimensional salvo por un múltiplo constante [3, pág.28].

### 1.3. Sistemas Iterados de funciones

Los *sistemas iterados de funciones* son una de las formas más conocidas para generar fractales en espacios Euclidianos. Para poder definir un sistema iterado de funciones usaremos contracciones en espacios métricos completos. A lo largo de esta sección veremos ejemplos que presentan un patrón en cada iteración. Este patrón es conocido como *autosimilitud o autosemejanza*.

**Definición 1.3.1.** A una familia finita o numerable de funciones  $\{f_i\}_{i=1}^n$  ( $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ ), donde  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lo llamamos un *sistema iterado de funciones en  $\mathbb{R}^n$* .

Durante nuestro trabajo nos referiremos a los sistemas iterados de funciones como *SIF*.

En el ejemplo (1.1.1) mostramos algunas contracciones, similitudes y dilataciones. Usaremos estas funciones para ejemplificar algunos sistemas iterados de funciones

#### Ejemplo 1.3.2.

1. Sean  $f_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  con  $i = 0, 1$ , donde

$$f_0(x) = \frac{x}{3} \text{ y } f_1(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \quad (1.9)$$

2. Consideremos los vértices:

$p_0 = (0, 0)$ ,  $p_1 = (1, 0)$  y  $p_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  y  $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  para  $i = 0, 1, 2$  dadas por:

$$f_0(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(0, 0), \quad f_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(1, 0) \text{ y } f_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad (1.10)$$

3. Sean  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  y  $p_i \in \mathbb{R}^2$  son  $n$  puntos distintos. El SIF es:

$$f_i(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} - (1 - \lambda)p_i,$$

Como el objetivo de este trabajo es calcular la dimensión de conjuntos fractales, y los métodos de geometría y cálculo clásico no son adecuados para estudiar fractales, necesitamos técnicas alternativas. La principal herramienta de la geometría fractal es la dimensión en sus múltiples formas. Así, podríamos pensar en un conjunto con  $m$  copias de si mismo escaladas



por un factor  $r$  tienen una dimensión representada por el número  $\frac{\log m}{\log r}$ . El número obtenido se denomina *dimensión (o valor) de similitud*.

A continuación, damos una definición formal del valor de similitud.

**Definición 1.3.3.** Sea  $\{f_i\}_{i=1}^n$  un SIF, donde  $f_i$  es una similitud de radio  $\lambda_i \in (0, 1)$ .

1. A  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  lo llamamos *lista de radios de  $\{f_i\}$* .
2. Definimos el *valor de similitud de  $\{f_i\}$*  como el único valor  $s > 0$  tal que

$$\sum_{i=1}^n r_i^s = 1. \quad (1.11)$$

Veamos el valor de similitud de los sistemas iterados de funciones que definimos en el Ejemplo 1.3.2

**Ejemplo 1.3.4.** Consideremos el intervalo  $[0, 1]$  y radio  $\frac{1}{3}$ . Usaremos las funciones definidas en (1.9) evaluadas en los extremos del intervalo  $[0, 1]$  y consideremos los radios  $r_1 = r_2 = \frac{1}{3}$ . Entonces, por la Definición 1.11 tenemos que el valor de similitud es

$$s = \frac{\log(2)}{\log(3)}.$$

Hablemos un poco de la geometría de este sistema iterado de funciones; veamos las primeras 2 iteraciones del sistema:

$$\begin{array}{ll} f_0(0) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0 & f_0(1) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \\ f_1(0) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} & f_1(1) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} = 1 \\ f_0(f_0(0)) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0 & f_0(f_0(1)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \\ f_0(f_1(0)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} & f_0(f_1(1)) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \\ f_1(f_0(0)) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} & f_1(f_1(1)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{9} \\ f_1(f_0(1)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{9} & f_1(f_1(1)) = 1 \end{array}$$

Con estas iteraciones, obtenemos los intervalos  $[0, \frac{1}{9}]$ ,  $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$ ,  $[\frac{1}{3}, \frac{7}{9}]$ ,  $[\frac{8}{9}, 1]$ . Estos corresponden a  $C_2$  en fig.1.1.

Continuando de esta manera, en la etapa  $j$ -ésima habremos obtenido  $2^j$  intervalos  $C_j$  cerrados. El conjunto límite de este proceso es el Conjunto de Cantor ternario. Notemos que  $C = \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$ .

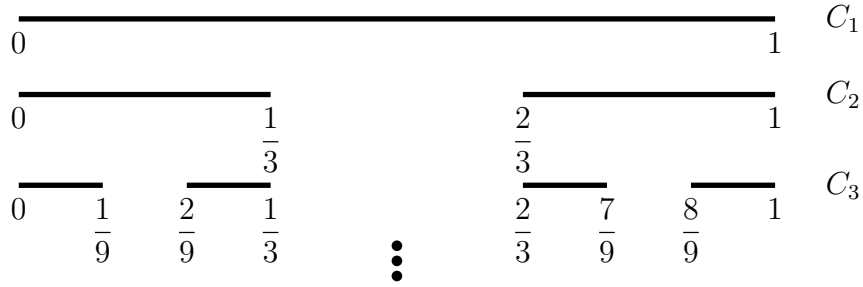


Figura 1.1: Conjunto de Cantor Ternario

**Ejemplo 1.3.5.** Para este caso usaremos las funciones definidas en 2 del Ejemplo 1.3.2 y consideremos los radios  $r_0 = r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ . Entonces, por la Definición 1.11 tenemos que el valor de similitud es

$$\frac{\log(3)}{\log(2)}.$$

Para ver la geometría haremos dos iteraciones de estas funciones. Notemos que los puntos  $p_i$  son los vértices de un triángulo equilátero.

$$\begin{aligned} f_0(p_0) &= f_0(0, 0) = \frac{1}{2} \cdot (0, 0) = (0, 0) \\ f_0(p_1) &= f_0(1, 0) = \frac{1}{2} \cdot (1, 0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ f_0(p_2) &= f_0\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\ f_1(p_0) &= f_1(0, 0) = \frac{1}{2} \cdot (0, 0) + \frac{1}{2} \cdot (1, 0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ f_1(p_1) &= f_1(1, 0) = \frac{1}{2} \cdot (1, 0) + \frac{1}{2} \cdot (1, 0) = (1, 0) \\ f_1(p_2) &= f_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot (1, 0) = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\ f_2(p_0) &= f_2(0, 0) = \frac{1}{2} \cdot (0, 0) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\ f_2(p_1) &= f_2(1, 0) = \frac{1}{2} \cdot (1, 0) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\ f_2(p_2) &= f_2\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

Notemos que  $f_0(p_0)$ ,  $f_1(p_1)$ ,  $f_2(p_2)$  son puntos fijos. Mientras que al graficar los otros seis puntos forman los vértices del triángulo equilátero invertido (fig.1.2). Entonces, para la segunda iteración  $x = \{f_0(p_1), f_0(p_2), f_1(p_0), f_1(p_2), f_2(p_0), f_2(p_1)\}$  para cada

función  $f_i(x)$ ; por ejemplo, para  $f_0(x)$  debemos hacer

$$f_0(f_0(p_1)), \quad f_0(f_0(p_2)), \quad f_0(f_1(p_0)), \quad f_0(f_1(p_2)), \quad f_0(f_2(p_0)), \quad f_0(f_2(p_1)),$$

de manera análoga para  $f_1$  y  $f_2$ . Los puntos obtenidos en esta iteración nos definen tres triángulos equiláteros (fig.1.3). Continuando indefinidamente de esta manera, en la  $n$ -ésima iteración estamos generando  $3^n$  triángulos. El conjunto límite de este proceso es  $\mathcal{S} = \bigcap_{i=0}^{\infty} f_i$ .

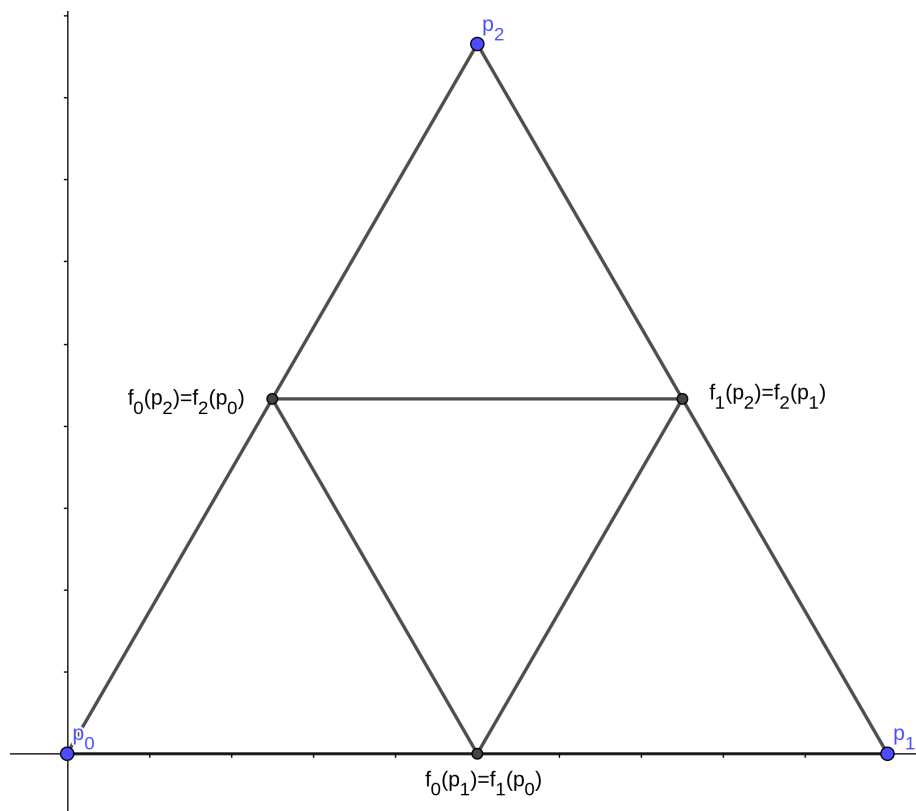


Figura 1.2: Primera Iteración del Ejemplo 1.3.5

Con estos ejemplos concluimos que, el valor de similitud del conjunto de Cantor ternario  $C$  es  $\frac{\log(2)}{\log(3)}$  y del Triángulo de Sierpiński  $\mathcal{S}$  es  $\frac{\log(3)}{\log(2)}$ . Además, observamos que existe un conjunto límite o conjunto atractor ( $C$  y  $S_{\frac{1}{2}}$ ). Esto lo formalizaremos más adelante.

**Proposición 1.3.6.** Sea  $\{f_i\}_{i=1}^n$  un SIF, donde  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función de contracción de radio  $r$  para  $i = 1, \dots, n$ . Definimos  $F : 2^{\mathbb{R}^n} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$  como  $F(E) = \bigcup_{i=1}^n f_i(E)$ . Entonces,  $F$  es una contracción.

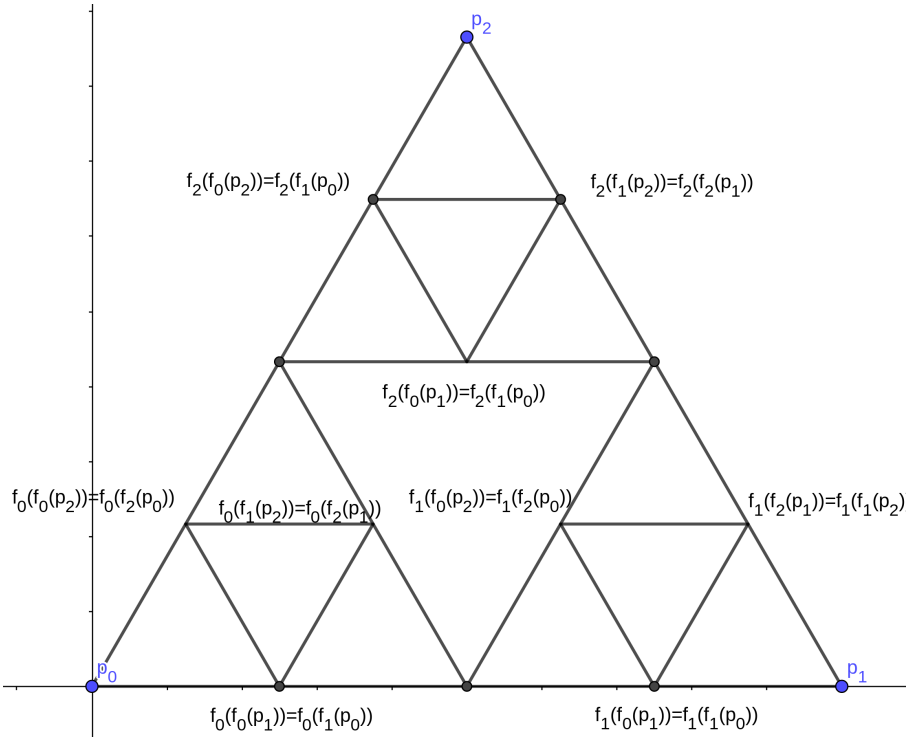


Figura 1.3: Segunda Iteración del Ejemplo 1.3.5

*Demostración.* Sean  $A, B \in 2^{\mathbb{R}^n}$ , entonces

$$\begin{aligned}
 d(A, B) &= d(F(A), F(B)) \\
 &= d\left(\bigcup_{i=1}^n f_i(A), \bigcup_{i=1}^n f_i(B)\right) \\
 &\leq \max_{1 \leq i \leq p} d(f_i(A), f_i(B)) \\
 &= \max\{r_i\}d(A, B)
 \end{aligned}$$

Puesto que sucede  $d(F(A), F(B)) \leq \max\{r_i\}d(A, B)$  se tiene que  $F$  es una contracción.  $\square$

**Definición 1.3.7.** Sea  $\{f_i\}$  un SIF finito (infinito) en  $\mathbb{R}^n$ . Decimos que un subconjunto  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}^n$  es un *atractor* para  $\{f_i\}$  si  $\Lambda$  es compacto y

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^m f_i(\Lambda). \quad (1.12)$$

A la condición (1.12) la conocemos como *invarianza bajo  $\{f_i\}$* .

Este conjunto atractor lo usaremos mas adelante, ya que le estaremos calculando la dimensión topológica, dimensión fractal.

**Lema 1.3.8.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $f : X \rightarrow X$  una contracción de radio  $r \in (0, 1)$ . Sean  $x_0 \in X$  un punto y  $x_n = f^n(x_0)$ . Entonces  $d(x_{n+1}, x_n) \leq r^n d(x_1, x_0)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Vamos a proceder a demostrar el lema por inducción. Sea  $n = 1$ , entonces  $d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq rd(x_1, x_0)$ .

Supongamos que se cumple para  $k \in \mathbb{N}$ , es decir,

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq r^k d(x_1, x_0)$$

Mostraremos  $d(x_{k+2}, x_{k+1}) \leq r^{k+1} d(x_1, x_0)$ . Entonces

$$\begin{aligned} d(x_{k+2}, x_{k+1}) &= d(f(x_{k+1}), f(x_k)) \\ &\leq r(r^k d(x_1, x_0)) \\ &\leq r^{k+1} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que  $d(x_{n+1}, x_n) \leq r^n d(x_1, x_0)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Recordemos que dada una función  $f : X \rightarrow X$ , decimos que un punto  $x \in X$  es *punto fijo* para  $f$ , si  $f(x) = x \in X$ .

**Teorema 1.3.9** (Principio de contracción de Banach). *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $f : X \rightarrow X$  una contracción, entonces existe un único punto fijo para  $f$ .*

*Demostración.* Para probar la existencia del punto fijo. Sea  $x_0$  cualquier punto en  $X$ . Consideremos la sucesión de sus iterados bajo  $f$ , es decir,

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \dots, \quad x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0)$$

Por el Lema 1.3.8 la sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy, es decir,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq \lambda^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq \lambda^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

como  $0 < \lambda < 1$ , esto implica que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_{n+1}, x_n)$  converge [6]. Por lo tanto  $\{x_n\}$  es de Cauchy. Dado que  $X$  es completo, existe  $p \in X$  tal que

$$x_n \rightarrow p. \tag{1.13}$$

Por continuidad de  $f$ , se sigue entonces que

$$x_{n+1} = f(x_n) \rightarrow f(p). \tag{1.14}$$

Puesto que  $\{x_{n+1}\}$  es subsucesión de  $\{x_n\}$ , de (1.13) resulta que  $x_{n+1} \rightarrow p$ . Por (1.14), se tiene  $p = f(p)$ .

Veamos la unicidad. Sea  $\lambda \in (0, 1)$  y  $p, q \in X$ . Supongamos que  $f(p) = p$  y  $f(q) = q$ . Luego,

$$d(p, q) = d(f(p), f(q)) \leq \lambda d(p, q).$$

Ya que  $\lambda < 1$ , esto implica que  $d(p, q) = 0$  y, por lo tanto,  $p = q$ . Con esto probamos la unicidad.  $\square$

**Teorema 1.3.10.** *Sean  $X$  un espacio métrico completo  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  una lista de contracciones y  $\{f_i\}_{i=1}^n$  un sistema iterado de funciones donde  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una contracción de radio  $r_i$  con  $r_i \in (0, 1)$ . Entonces, existe un único subconjunto  $\Lambda \in 2^{\mathbb{R}^n}$  un atractor para  $\{f_i\}_{i=1}^n$ .*

*Demostración.* Consideremos  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  un SIF que satisface las hipótesis anteriores y  $F : 2^{\mathbb{R}^n} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$  como en la Proposición 1.3.6, es decir,  $F(E) = \bigcup_{i=1}^n (F_i(E))$  con  $\bigcup_{i=1}^n (F_i(E))$  compacto. En la Proposición 1.3.6 probamos que la función  $F$  es una contracción. Por el principio de Contracción de Banach (Teorema 1.3.9). Existe un único  $\lambda \in 2^{\mathbb{R}^n}$ , tal que  $F(\lambda) = \lambda$ . Entonces, por la definición de  $F$ ,

$$\Lambda = F(\Lambda) = \bigcup_{i=1}^n (F_i(\Lambda)).$$

Por lo tanto,  $\Lambda$  es invariante. □

# Capítulo 2

## Dimensión Topológica y Dimensiones Fractales

En este capítulo definiremos dos tipos de dimensiones de conjuntos con los que trabajaremos. Las dimensiones que se considerarán se dividen generalmente en dos clases amplias: dimensión topológica y dimensión fractal.

En geometría elemental se han asociado a los conjuntos una dimensión. Por ejemplo, los puntos tienen dimensión 0. Las curvas tienen dimensión 1. Las superficies tienen dimensión 2, etc. Esto se ve reflejado en dimensión topológica. Por otro lado, están las dimensiones fractales. Nos enfocaremos en la dimensión de Hausdorff y la dimensión por cajas. La característica sorprendente de estas dimensiones es que no necesariamente son números enteros como veremos en algunos ejemplos.

Al final de este capítulo haremos una pequeña comparación entre estas dimensiones utilizando algunos ejemplos.

### 2.1. Dimensión topológica

La dimensión topológica se define de dos maneras: la *dimensión inductiva* y la *dimensión por cubiertas*. Es posible mostrar que ambos son equivalentes (ver [2, pág.120]).

Sea  $X$  un espacio métrico. Decimos que  $X$  es *0-dimensional*, denotado por  $\dim_T(X) = 0$  si y sólo si para toda cubierta abierta finita  $\mathcal{A}$  de  $X$  tiene un refinamiento finito formado por subconjuntos abiertos-cerrados que además es una partición de  $X$ .

**Proposición 2.1.1.** *Sea  $X$  un espacio métrico completo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1.  $\dim_T(X) = 0$ ;
2. si  $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$  es una cubierta abierta finita de  $X$  entonces existen subconjuntos abierto-cerrado  $B_i \subset U_i$  tales que  $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$  es una partición de  $X$ ;

3. si  $\{U, V\}$  es una cubierta de  $X$  entonces existen  $A \subset U$  y  $B \subset V$  abiertos tales que  $A \cup B = X$  y  $A \cap B \neq \emptyset$ ;
4. si  $\{U, V\}$  es una cubierta de  $X$  entonces existen  $A \subset U$  y  $B \subset V$  cerrados tales que  $A \cup B = X$  y  $A \cap B \neq \emptyset$ .

La demostración del Teorema 2.1.1 se encuentra en [2, pág 86].

Sean  $U, V \subset \mathcal{P}(X)$ . Decimos que  $V$  está *subordinada* a  $U$  si para cada  $v \in V$  existe un  $u \in U$  tal que  $V < U$ . Ahora, consideremos a tal que  $n \geq -1$ . Sean  $A \subset \mathcal{P}(X)$  y a  $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ . Decimos que el *orden de*  $\mathcal{A}$  es menor o igual que  $n$ . Si para cualquier colección de  $n + 2$  elementos de  $\mathcal{A}$ ,  $\{A_\alpha\}_{\alpha=1}^{n+2}$  cumple que  $\bigcap_{\alpha=1}^{n+2} A_\alpha = \emptyset$ . Decimos que *el orden de*  $A$  es  $n$ , si  $A$  tiene orden  $n$  pero no tiene orden  $n - 1$ .

Usando la noción de orden damos la siguiente definición.

**Definición 2.1.2.** Sea  $X$  espacio métrico completo.  $X$  tiene *dimensión por cubiertas menor o igual que*  $n$  (con  $n \geq -1$ ) si para cualquier cubierta abierta finita  $\{U_i\}_{i=1}^k$  de  $X$  existe un refinamiento  $\mathcal{V}$  tal que el orden de  $\mathcal{V}$  es menor o igual que  $n$ .

Decimos que  $X$  tiene *dimensión por cubiertas igual a*  $n$ , denotado por  $\text{Cub}(X) = n$ , si  $X$  tiene *dimensión por cubiertas menor o igual a*  $n$  pero no menor o igual a  $n - 1$ . A  $\text{Cub}(X)$  también se le conoce como la *dimensión de Lebesgue* de  $X$ .

**Teorema 2.1.3.** Sea  $X$  y  $n \geq 0$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

- $\text{Cub}(X) \leq n$ .
- Si  $\{U_i\}_{i=1}^k$  cualquier cubierta finita de  $X$ , entonces existen  $\mathcal{V}_i \subset U_i$ , para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$  subconjuntos abiertos tales que  $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_i\}_i = 1^k$  es una cubierta abierta de  $X$  y  $\mathcal{V}$  tiene orden menor o igual a  $n$ .
- Si  $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$  es una cubierta abierta de  $X$ , entonces existen  $\mathcal{V}_i \subset U_i$  tales que  $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_i\}_{i=1}^{n+1}$  es una cubierta abierta de  $X$  con orden menor o igual a  $n$ . Esto lo podemos ver como  $\bigcup_{i=1}^{n+2} V_i = X$ ,  $\bigcap_{i=1}^{n+2} V_i = \emptyset$ .
- Si  $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$  es cubierta abierta finita de  $X$  entonces existen  $F_i \subset U_i$  cerrados para todo  $i$  tal que  $\bigcup_{i=1}^{n+2} F_i = X$ ,  $\bigcap_{i=1}^{n+2} F_i = \emptyset$ .

La demostración del Teorema 2.1.3 se encuentra en [2, pág 92, Teorema 3.2.1].

Definiremos la *mall*a de una cubierta  $\mathcal{U}$  como

$$\text{mall}a(\mathcal{U}) = \sup_{\alpha \in \Lambda} \{\text{diám}(U_\alpha)\}.$$



**Teorema 2.1.4.** *Sea  $X$  un espacio métrico compacto. Entonces  $\text{Cub}(X) \leq n$  si y solo si para  $\varepsilon > 0$  existe una cubierta abierta  $\mathcal{U}$  de orden menor o igual que  $n$  y  $\text{malla}(\mathcal{U}) \leq \varepsilon$*

La demostración del Teorema 2.1.4 se encuentra en [2, pág 93, Teorema 3.2.2].

**Ejemplo 2.1.5.** Consideremos el conjunto de Cantor definido en el Ejemplo 1.3.4.

Observemos que en la  $n$ -ésima iteración el conjunto son solos puntos y como vimos en el inicio de esta sección los puntos tienen dimensión 0. Así concluimos que  $\text{Cub}(C) = 0$ .

**Ejemplo 2.1.6.** Consideremos a  $S$  el Triángulo de Sierpiński definido en el Ejemplo 1.3.5.

Las figuras 1.2 y 1.3 representan la primera y segunda iteración las cuales representaremos como  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$ . En general  $\mathcal{S}_k$  es la  $k$ -ésima iteración del SIF.

Notemos que cada conjunto  $\mathcal{S}_k$  está formado por  $3^k$  triángulos. A cada triángulo lo llamaremos  $T_i$  con  $i \in \mathbb{N}$ . Cada uno de estos triángulos es equilátero sus lados son iguales a  $2^{-k}$ , para un valor dado de  $k \in \mathbb{N}$ . Para  $T_i$  y  $T_j$  con  $i \neq j$  donde  $i, j = 0, 1, 2$  en los primeros 3 casos se tienen que la intersección es en un punto y para las siguientes generaciones de  $T_i$  y  $T_j$  es  $d(T_i, T_j) \leq \frac{2^{-k}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ . Los huecos  $\Delta_n \setminus \Delta_{n+1}$  son triángulos con un lado  $2^{-k}$  y, por lo tanto

altura  $\frac{2^{-k}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ . Consideremos  $r > 0$  tal que  $r < \frac{2^{-k}}{3}$ . Entonces las  $r$ -nubes de esos triángulos son conjuntos abiertos. Por lo tanto se tiene una cubierta de  $\mathcal{S}$  con orden 1 y malla a lo más  $2^{-k} + 2r$ . Por lo tanto,  $\text{Cub}(\mathcal{S}) \leq 1$ . Por otro lado,  $\mathcal{S}$  contiene segmentos de línea que tienen dimensión 1. Entonces,  $\text{Cub} \geq 1$ . Por lo tanto la dimensión por cubiertas de  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$  es  $\text{Cub}(\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}) = 1$ .

Esto se puede ver en la figura 1.2. Los triángulos  $T_1, T_2, T_3$  tienen lados de longitud  $2^{-1}$  (observe las figuras 2.1 y 2.2). Si  $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$  entonces  $T_1 \cap T_2 = f_0(p_2) = f_2(p_0)$ .

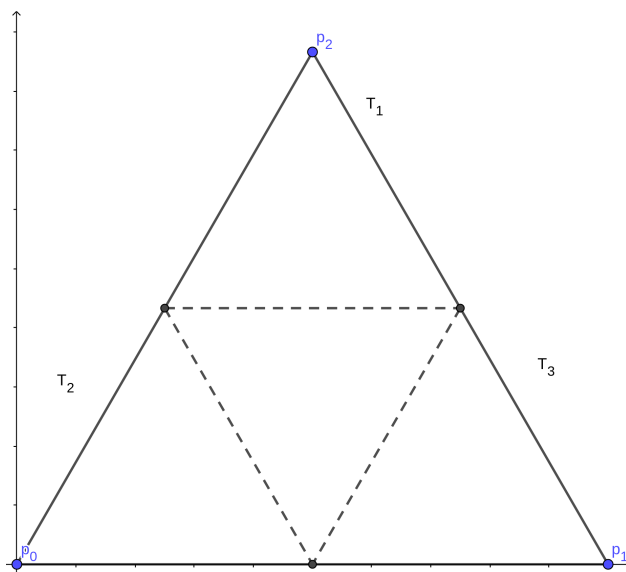


Figura 2.1: Intersección entre  $T_1, T_2, T_3$

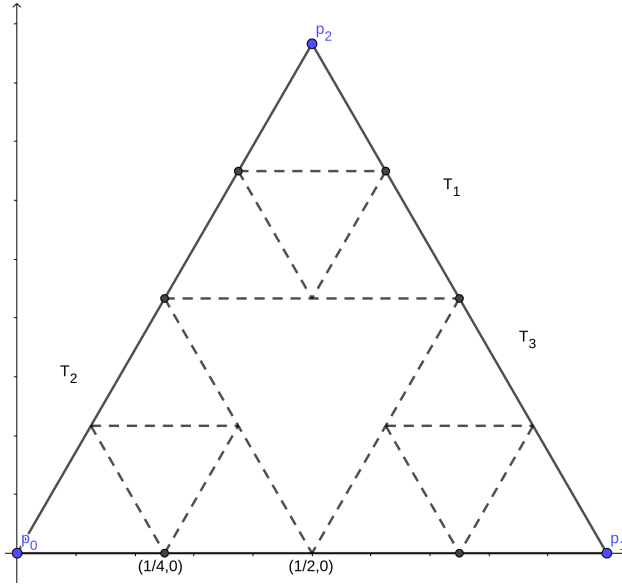


Figura 2.2:  $S_2$  del Triángulo de Sierpiński.  $d((\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{4}, 0)) = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

**Ejemplo 2.1.7.** Consideremos a  $\mathbb{Q}$  el conjunto de números racionales. Sea  $V$  una vecindad de  $p \in \mathbb{Q}$ , y  $r \in \mathbb{R}$  con  $r > 0$ . Tal que  $V_r(p) \subset U$  y  $d(x_i, p)$ , donde  $x \in \mathbb{Q}$ . Existe  $r' > 0$ ,  $r' < r$  y  $r' \neq d(x_i, p)$  para todo  $i$ . Entonces,  $V_{r'}(p)$  y  $\partial V_{r'}(p) = \emptyset$ . Por lo tanto, la dimensión topológica de  $\mathbb{Q}$  es 0.

## 2.2. Dimensión de Hausdorff

Recordemos que en la Subsección 1.2.1 definimos la medida de Hausdorff  $s$ -dimensional como

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s,$$

donde  $\mathcal{H}_\delta^s$  está definido en 1.5. Es claro que, para cualquier  $F \subset \mathbb{R}^n$  y  $\delta < 1$ ,  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  es no decreciente con respecto a  $s > 0$ . Entonces,  $\mathcal{H}^s(F)$  es también una función no decreciente. Más aún, si  $t, s \in \mathbb{N}$  y son tales que  $t > s$  además  $\{U_i\}_{i=1}^\infty$  es una  $\delta$ -cubierta de  $F$ , tenemos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(U_i)^t \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(U_i)^{t-s} \text{diám}(U_i)^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(U_i)^s.$$

Tomando el ínfimo sobre  $s$  y  $t$ , obtenemos que

$$t\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta_{t-s}\mathcal{H}_\delta^s.$$

Así, cuando  $\delta \rightarrow 0$ , observamos que si  $\mathcal{H}_\delta^s(F) = \infty$ , entonces  $\mathcal{H}_\delta^s(F) = 0$  para  $t > s$ .

La gráfica de  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  (ver figura. 2.3) muestra que hay un valor crítico de  $s$  en el que  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  cambia de  $\infty$  a 0. A este valor crítico lo llamamos la *dimensión de Hausdorff de  $F$* . Con esto damos la siguiente definición.

**Definición 2.2.1.** Definimos la *dimensión de Hausdorff* como:

$$\begin{aligned} \dim_H(F) &= \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} \\ &= \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}. \end{aligned}$$

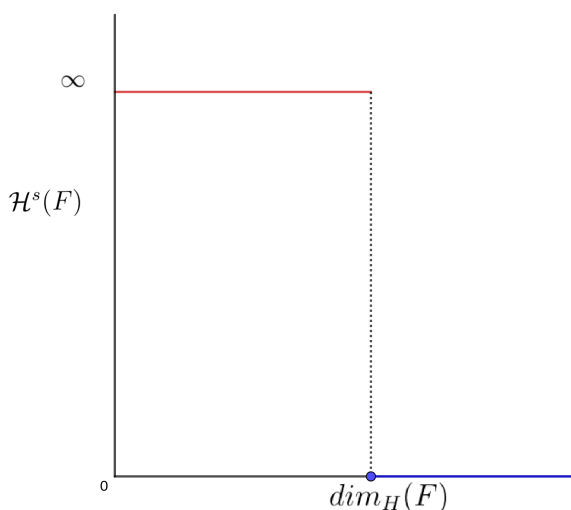


Figura 2.3: Gráfica de  $\mathcal{H}(F)$

Observemos que

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 \leq s < \dim_H(F); \\ 0 & \text{si } s > \dim_H(F). \end{cases}$$

Ya que definimos la dimensión de Hausdorff, definiremos algunas de sus propiedades.

**Definición 2.2.2.** Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función Hölder si  $f$  satisface

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)^\alpha, \text{ con } x, y \in F \quad (2.1)$$

para constantes  $c > 0$  y  $\alpha > 0$ . A (2.1) se le conoce como *condición de Hölder* de exponente  $\alpha$ . Si  $\alpha = 1$ , es decir  $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$  decimos que  $f$  es una *función Lipschitz*.

**Proposición 2.2.3.** Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función Hölder con exponente  $\alpha$ . Entonces

$$\dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(F), \text{ con } \alpha > 0.$$

*Demostración.* Supongamos que  $s > \dim_H(F)$  entonces  $\mathcal{H}^s(F) = 0$ . Dado que  $f$  satisface la condición de Hölder

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F)$$

se tiene  $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) = 0$  lo que implica que  $\frac{s}{\alpha} > \dim_H f(F)$  de aquí  $s > \alpha \dim_H f(F)$ .

Luego  $\dim_H(F) \geq \alpha \dim_H f(F)$ . Por lo tanto  $\frac{1}{\alpha} \dim_H(F) \geq \dim_H f(F)$  □

**Corolario 2.2.4.** Si  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una transformación Lipschitz entonces  $\dim_H f(F) \leq \dim_H(F)$ .

*Demostración.* La demostración se deduce de la Proposición 2.1 cuando  $\alpha = 1$ .  $\square$

**Proposición 2.2.5.** Si  $E \subset \mathbb{R}^n$  y  $\dim_H(E) < 1$ . Entonces  $E$  es totalmente desconexo.

*Demostración.* Sean  $x, y \in F$  con  $x \neq y$ . Definimos  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  por  $f(z) = d(x, z)$ . Notemos que  $f$  no incrementa las distancias, es decir:

$$d(f(x), f(z)) = d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z) - d(y, z) = d(y, z).$$

Usando el Corolario 2.2.4 se tiene que  $\dim_H f(F) \leq \dim_H(F)$ . Esto implica que  $f(F)$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  de medida  $\mathcal{H}^1$  de tamaño 0. Por lo tanto, el complemento de  $F$  es denso. Tomado  $r \notin f(F)$  y  $0 < r < f(y)$  se tiene que

$$F = \{z \in F : d(x, z) < r\} \cup \{z \in F : d(y, z) > r\}$$

$F$  contiene dos conjuntos disjuntos abiertos con  $x$  en un conjunto y  $y$  en otro, así que  $x, y$  están en dos componentes conexas de  $F$ . Por lo tanto  $F$  es desconexo.  $\square$

Veremos la dimensión de Hausdorff para los ejemplos que hemos venido usando.

**Ejemplo 2.2.6.** Consideremos  $C$  el conjunto de Cantor ternario.

Definimos la parte izquierda  $F_I = C \cap [0, \frac{1}{3}]$  y la parte derecha  $F_D = C \cap [\frac{2}{3}, 1]$ . Observemos que  $F_I$  y  $F_D$  son geoméricamente similares a  $F$  por escala de  $\frac{1}{3}$  y que  $F = F_I \cup F_D$ . Además,  $f_I \cup f_D = \emptyset$ . Por lo tanto para cualquier  $s > 0$  se tiene:

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(F_I) + \mathcal{H}^s(F_D) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C) \quad (2.2)$$

Suponiendo que el valor crítico  $s$  es finito tenemos que  $0 \leq \mathcal{H}^s(C) \leq \infty$ . Podemos dividir a (2.2) por  $\mathcal{H}^s(C)$  entonces

$$1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^s.$$

Así,  $s = \frac{\log(2)}{\log(3)}$ . Por lo tanto  $s = \dim_H(C)$ .

Recordemos que en el ejemplo 1.3.4 formamos intervalos  $C_k$  que componen a  $C$ , a estos conjuntos los llamamos *intervalos de nivel  $k$*  cada uno con radio  $3^{-k}$ . Tomando los intervalos de  $E_k$  como una  $3^{-k}$ -cubierta de  $C$  tenemos que  $\mathcal{H}_{3^{-k}}^s C \leq 2^k 3^{ks} = 1$ . Si  $s = \frac{\log(2)}{\log(3)}$ , y dejando  $k \rightarrow \infty$  tenemos que  $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$ .

Para ver que  $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(C)$  mostraremos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(U_i)^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s} \quad (2.3)$$

para una cubierta de  $C$ .

Si el intervalo  $C_k$  se cubre a si mismo podemos expandirlo ligeramente y sigue cubriendo al intervalo. Esta extensión de los intervalos  $C_k$  forma una nueva cubierta  $U_k$ , observemos la figura 2.4. Usando la compacidad de  $C$ , necesitamos solamente verificar que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(U_i)^s \geq \frac{1}{2}.$$

Si  $\{U_i\}$  es una colección finita de subintervalos cerrados de  $[0, 1]$ . Para cada  $U_i$ , sea  $k$  entero tal que

$$3^{-(k+1)} \leq \text{diám}(U_i) \leq 3^{-k}. \tag{2.4}$$

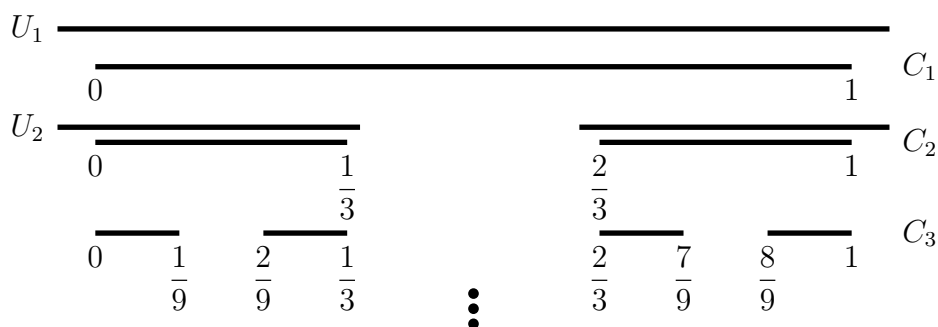


Figura 2.4: Expansión de intervalos  $C_k$  del Conjunto de Cantor Ternario

Entonces,  $U_i$  puede intersectar al menos un intervalo de nivel  $k$ . Si  $j > k$  entonces por construcción,  $U_i$  intersecta al menos  $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s \text{diám}(U_i)^s$  intervalos de nivel  $j$  de  $E_j$ . Usando (2.4), si elegimos  $j$  suficientemente grande tal que  $3^{-(k+1)} \leq \text{diám}(U_i)$  para todo  $U_i$ , dado que  $U_i$  intercepta a  $2^j$  intervalos de radio  $3^{-j}$ , contando los intervalos obtenemos  $2^j < \sum_{i=1} 2^j 3^s \text{diám}(U_i)^s$  lo que se deduce a (2.3). Por lo tanto  $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$ .

**Ejemplo 2.2.7.** Para el Triángulo de Sierpiński usual  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$  como en la figura 1.2. Notemos que podemos generar 3 cubiertas  $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3)$  tales que no se intersectan. Por lo tanto para cualquier  $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathcal{S})^s &= \mathcal{H}^s(\mathcal{S}_1) + \mathcal{H}^s(\mathcal{S}_2) + \mathcal{H}^s(\mathcal{S}_3) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}^s(\mathcal{S}) + \left(\frac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}^s(\mathcal{S}_2) + \left(\frac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}^s(\mathcal{S}_3) \end{aligned}$$

por la definición de la medida de Hausdorff. Tenemos que  $0 < H^s(F) < \infty$ . Entonces,

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s \\ &= 3 \left(\frac{1}{2}\right)^s \\ s &= \frac{\log 3}{\log 2} \end{aligned}$$

Por lo tanto  $s = \dim_H(\mathcal{S}_{\frac{1}{2}})$ .

**Proposición 2.2.8.** Sean  $A, B$  subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . La dimensión de Hausdorff tiene las siguientes propiedades:

1. si  $A \subset B$ , entonces  $\dim_H(A) \leq \dim_H B$ ;
2.  $\dim_H(A \cup B) = \max\{\dim_H(A), \dim_H(B)\}$ ;
3.  $\dim_H(\bigcup_j A_j) = \sup_j \dim_H A_j$ , donde  $A_j$  es cualquier colección numerable de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.*

1. Supongamos que  $A \subset B$ . Si  $s > \dim_H(B)$ , entonces  $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B) = 0$ . Por lo tanto,  $\dim_H(A) \leq s$ . Esto es verdad para todo  $s > \dim_H(B)$ , así  $\dim_H(A) \leq \dim_H B$ .
2. Sea  $s > \max\{\dim_H(A), \dim_H(B)\}$ . Entonces,  $s > \dim_H(A)$ , así  $\mathcal{H}^s(A) = 0$ . Similarmente,  $\mathcal{H}^s(B) = 0$ . Entonces,

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) \leq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) = 0.$$

Por lo tanto,  $\dim_H(A \cup B) \leq s$ . Esto se cumple para todo  $s > \max\{\dim_H(A), \dim_H(B)\}$ , entonces

$$\dim_H(A \cup B) \leq \max\{\dim_H(A), \dim_H(B)\}.$$

Notemos que por la condición (1) se cumple que

$$\dim_H(A \cup B) \geq \max\{\dim_H(A), \dim_H(B)\}.$$

3. Sea  $Z = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ . Como  $A_j \subset Z$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ , por (1)  $\dim_H(A_j) \leq \dim_H Z$ . Por lo tanto,  $\sup_{j \in \mathbb{N}} \dim_H(A_j) \leq \dim_H(Z)$ . Además, si  $\alpha > \sup_{j \in \mathbb{N}} \dim_H(A_j)$ , entonces  $\alpha > \dim_H A_j$ , para todo  $j$ . Lo cual implica,  $\mathcal{H}^s(A_j) = 0$  para todo  $j$ , lo cual implica que  $\dim_H Z < \alpha$  para toda  $\alpha > \sup_{j \in \mathbb{N}} \dim_H(A_j)$ .

□

El siguiente teorema nos es de utilidad para enunciar el Teorema 2.4.5.

**Teorema 2.2.9.** [Principio de distribución de masa] Sean  $\mu$  una medida finita de  $\mathbb{R}^n$  y  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible tal que  $\mu(E) > 0$ . Supongamos que existen constantes  $s > 0, c > 0, \delta_0 > 0$  tales que

$$\mu(U) \leq c \cdot \text{diám}(U)^s$$

para cualquier conjunto de  $U$  tal que  $\text{diám}(U) \leq \delta_0$ . Entonces

$$\mathcal{H}^s(E) \geq \frac{\mu(E)}{c}$$

y además

$$\dim_H(E) \leq s.$$

*Demostración.* Consideremos a  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Tomemos  $\delta > 0, \varepsilon > 0$  y sea  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$  una cubierta de  $E$  donde  $\mathcal{U}$  es una cubierta con  $\text{diám}(U_i) < \varepsilon$ . Entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(U_i)^s \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(U_i)}{c} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i)}{c} \geq \frac{\mu(E)}{c}.$$

Luego,

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(E) = \inf \left( \sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}(U_i)^s : (U_i) \text{ es una } \varepsilon\text{-cubierta de } E \right).$$

Supongamos que  $\varepsilon < \delta$ , tenemos que  $\mathcal{H}_{\varepsilon}^s(E) > \mathcal{H}_{\delta}^s(E)$ . Así,

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^s(E) > \sum_{i=1}^{\infty} U_i^s \geq \frac{\mu(E)}{c}$$

Al calcular el límite tenemos que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\varepsilon}^s(E) \geq \frac{\mu(E)}{c}$ . Por lo tanto,  $c\mathcal{H}^s(E) \geq \mu(E)$ . Lo que implica que  $\dim_H(E) \geq s$  □

## 2.3. Dimensión por cajas

En la Sección 2.2 observamos que el concepto de dimensión de Hausdorff utilizamos una familia de  $\delta$ -cubiertas de  $F$ . Es decir, se buscan cubiertas eficientes para cubrir. Dado que estamos trabajando en conjuntos compactos sabemos que toda cubierta abierta tiene una subcubierta finita. Así, para cualquier  $\delta$ -cubierta abierta existe una subcubierta finita para esa cubierta. Entonces, para cada cubierta abierta podemos definir un número pequeño  $\mathcal{N}_{\delta}(F)$  que depende de la cubierta.  $\mathcal{N}_{\delta}(F)$  es el mínimo número de abiertos que se necesitan para cubrir a  $F$ . La dimensión por cajas es un poco más natural que la de Hausdorff, pues conocemos la compacidad.

Definimos la *dimensión por cajas inferior y superior* de  $F$  denotadas por  $\underline{\dim}_B(F)$  y  $\overline{\dim}_B(F)$  respectivamente [3] como:

$$\begin{aligned}\underline{\dim}_B(F) &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta} \\ \overline{\dim}_B(F) &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta}\end{aligned}\tag{2.5}$$

Donde  $\liminf_{\delta \rightarrow 0}$ , y  $\limsup_{\delta \rightarrow 0}$  denotan el límite inferior y superior respectivamente.

Si  $\underline{\dim}_B(F) = \overline{\dim}_B(F)$ , nos referimos al valor común como la *dimensión por cajas de  $F$* , es decir,

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta}.\tag{2.6}$$

Notemos que  $\delta$  debe de ser lo suficientemente pequeño para asegurar que  $-\log \delta$  y cantidades similares son estrictamente positivas. Mostraremos las siguientes propiedades elementales de la dimensión por cajas pueden verificarse de la misma manera que en la Proposición 2.2.8.

**Proposición 2.3.1.** *La dimensión por cajas superior e inferior tiene las siguientes propiedades.*

1.  $\underline{\dim}_B \emptyset = \overline{\dim}_B \emptyset = 0$ .
2. Sean  $Z_1$  y  $Z_2$  dos conjuntos tales que  $Z_1 \subset Z_2$ , se tiene

$$\underline{\dim}_B Z_1 \leq \underline{\dim}_B Z_2 \text{ y } \overline{\dim}_B Z_1 \leq \overline{\dim}_B Z_2.\tag{2.7}$$

3. Si  $\{Z_i\}$  es cualquier colección numerable de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$\underline{\dim}_B \left( \bigcup_i Z_i \right) \geq \sup(\underline{\dim}_B Z_i) \text{ y } \overline{\dim}_B \left( \bigcup_i Z_i \right) \geq \sup(\overline{\dim}_B Z_i).$$

4. Sea  $\{Z_i\}$  es cualquier colección finita de conjuntos en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces

$$\overline{\dim}_B \left( \bigcup_{i=1}^k Z_i \right) = \max\{\overline{\dim}_B Z_i | i = 1, \dots, k\}.\tag{2.8}$$

La propiedad (4) solo es válida para la dimensión por cajas superior; para la dimensión por cajas inferior no se tiene ninguna propiedad de subaditividad. Dicho ejemplo para dimensión por cajas inferior se encuentra en [7].

*Demostración.*



1. La prueba es clara. Dado que  $\mathcal{N}_\delta = 0$  entonces,

$$\underline{\dim}_B(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta(\emptyset)}{-\log \delta} = 0.$$

De manera análoga para  $\overline{\dim}_B(\emptyset)$

2. Dado que  $Z_1 \subset Z_2$  entonces una cubierta de  $Z_2$  es una cubierta de  $Z_1$ . Más aún, si  $\mathcal{N}_\delta$  es el número más pequeño de  $\delta$ -cubiertas de  $Z_1$ , y  $\mathcal{N}_{2\delta}$  es el número más pequeño de  $\delta$ -cubiertas de  $Z_2$ , se tiene que  $\mathcal{N}_{2\delta} \leq \mathcal{N}_\delta$ . Así,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{N}_{2\delta} Z_1}{\delta} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{N}_\delta Z_2}{\delta}$$

Por lo tanto,  $\underline{\dim}_B Z_1 \leq \underline{\dim}_B Z_2$ . Para  $\overline{\dim}_B Z_1 \leq \overline{\dim}_B Z_2$  el argumento es análogo a lo anterior.

3. Esta propiedad de sigue de la propiedad (2).

□

**Ejemplo 2.3.2.** Sea  $F = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ . Dado que  $F$  es un conjunto numerable. Entonces  $\dim_H(F) = 0$ .

Por otro lado, en la dimensión por cajas queremos mostrar que  $\dim_B(F) = \frac{1}{2}$ . Sean  $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}$ , y  $k$  un entero tal que satisface  $\frac{1}{k(k+1)} \leq \delta < \frac{1}{k(k-1)}$ . Consideremos  $\text{diám}(U) < \delta$ , entonces  $U$  puede cubrir a al menos uno de los puntos  $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ . Ya que  $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} < \delta$ . Así al menos se requieren  $k$  conjuntos de diámetro  $\delta$  para cubrir a  $F$ , entonces  $\mathcal{N}_\delta(F) \geq k$ . Luego,

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B(F) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta} \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{-\log \frac{1}{k(k+1)}} \end{aligned}$$

dejando  $\delta \rightarrow 0$  y  $k \rightarrow \infty$ , obtenemos  $\underline{\dim}_B(F) \geq \frac{1}{2}$ . Por otro lado, si  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  y tomando  $k$  tal que  $\frac{1}{k(k+1)} \leq \delta < \frac{1}{k(k-1)}$ . Entonces  $(k+1)$  intervalos de tamaño  $\delta$  cubre a  $[0, \frac{1}{k}]$ , dejando  $k-1$  puntos de  $F$  que se pueden cubrir por otros  $k-1$  intervalos. Por lo tanto,  $\mathcal{N}_\delta(F) \leq 2k$ . Así que,

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B(F) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k}{-\log \frac{1}{k(k-1)}} \end{aligned}$$

dejando  $\delta \rightarrow 0$  y  $k \rightarrow \infty$ , obtenemos  $\overline{\dim}_B(F) \leq \frac{1}{2}$ .

Ya que  $\underline{\dim}_B(F) = \frac{1}{2} = \overline{\dim}_B(F)$ . Concluimos que  $\dim_B(F) = \frac{1}{2}$ .

**Ejemplo 2.3.3.** Consideremos a  $F = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ .

Sea  $\delta > 0$  y  $\mathcal{N}_\delta(F) = \frac{1}{\delta}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \dim_B(F) &= \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(\frac{1}{\delta})}{-\log \frac{1}{\delta}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.3.4.** Sea  $C$  el conjunto de Cantor ternario. Compuesto por  $E_k$  intervalos, entonces la cubierta son  $2^k$  intervalos de nivel  $k$  con tamaño  $3^{-k}$ . Luego,  $\mathcal{N}_\delta(C) = 2^k$  si  $3^{-k} < \delta < 3^{-(k+1)}$ . Usando (2.5)

$$\overline{\dim}_B(C) = \overline{\lim}_{n \rightarrow 0} \frac{\log 2^k}{-\log 3^{-(k+1)}} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Por otro lado, cualquier intervalo de tamaño  $\delta$  con  $3^{-k-1} < \delta < 3^{-k}$  intersecta a lo más uno de nivel  $k$  de tamaño  $3^{-k}$  usado en la construcción de  $C$ . Entonces, hay  $2^k$  intervalos de longitud  $\delta$  para cubrir a  $F$ . Por lo tanto,  $\mathcal{N}_\delta(C) \geq 2^k$ , llevando a

$$\underline{\dim}_B(C) \geq \frac{\log 2}{\log 3}$$

.

**Ejemplo 2.3.5.** A  $S_{\frac{1}{2}}$  lo podemos cubrir con  $3^n$  círculos de radio  $\frac{1}{2}$  con  $n \in \mathbb{N}$ . El centro de estos círculos son las intersecciones de las bisectrices que toman en cada iteración. Por ejemplo, la primera cubierta tiene centro en la intersección ( $O$ ) de las bisectrices generadas por los vértices  $p_0, p_1, p_2$  con radio  $r = (\frac{1}{2})^0 = 1$ . De manera similar, usando las bisectrices de los triángulos de la segunda iteración (fig.2.6). Entonces  $\mathcal{N}_\delta(S_{\frac{1}{2}}) = 3^n$  y  $\delta = \frac{1}{2}^n$ . Usando (2.6) obtenemos,

$$\dim_B(S_{\frac{1}{2}}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow 0} \frac{\log 3^n}{-\log 2^n} = \frac{\log 3}{\log 2}$$

Finalmente, comparemos las dimensiones de los Ejemplos 2.1.6, 2.1.5, 2.1.7, 2.2.6, 2.2.7, 2.3.4, 2.3.5 y 2.3.3. Para esto observemos la tabla (2.1).

Conjuntos	Dimensiones		
	Topológica	Hausdorff	Por cajas
Cantor	$\dim_T(C) = \text{Cov}(C) = 0$	$\dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$	$\dim_B(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$
Sierpiński	$\dim_T(S_{\frac{1}{2}}) = \text{Cub}(S_{\frac{1}{2}}) \leq 1$	$\dim_H(S_{\frac{1}{2}}) = \frac{\log 3}{\log 2}$	$\dim_B(S_{\frac{1}{2}}) = \frac{\log 3}{\log 2}$
$\mathbb{Q}$	$\dim_T(\mathbb{Q}) = 0$	$\dim_H(\mathbb{Q}) = 0$	$\dim_B(\mathbb{Q}) = 1$

Tabla 2.1: Dimensiones calculadas en la sección.

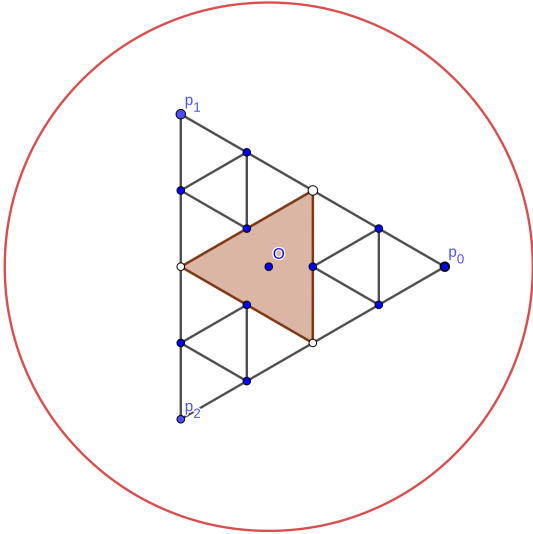


Figura 2.5: Primera Cubierta de  $S_{\frac{1}{2}}$

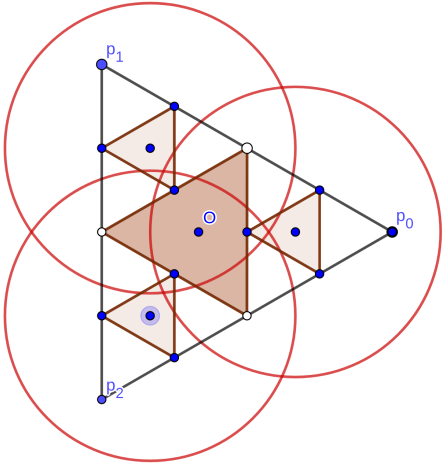


Figura 2.6: Segunda Cubierta de  $S_{\frac{1}{2}}$

Notemos que  $\dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3} = \dim_B(C)$  y  $\dim_H(S_{\frac{1}{2}}) = \frac{\log 3}{\log 2} = \dim_B(S_{\frac{1}{2}})$ .

Las dimensiones de Hausdorff y la dimensión por cajas, no siempre son iguales. Un ejemplo de esto es  $\mathbb{Q}$ , como vemos en la tabla 2.1.

## 2.4. La condición del conjunto abierto y triángulos de Sierpiński generalizados

En las Secciones 1.3 y 2.1 vimos algunas propiedades del Triángulo de Sierpiński usual, es decir, el generado con el sistema iterado de funciones definido en 2.1.6 con  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

En la figura 2.7 mostramos la de imagen del Triángulo de Sierpiński después de 100 iteraciones, con parámetro  $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Podemos observar que en cada iteración se obtienen 3 triángulos equiláteros. Así, decimos que el Triángulo de Sierpiński es totalmente autosimilar. La definición formal de autosimilitud la pospondremos a la Sección 2.4.4.

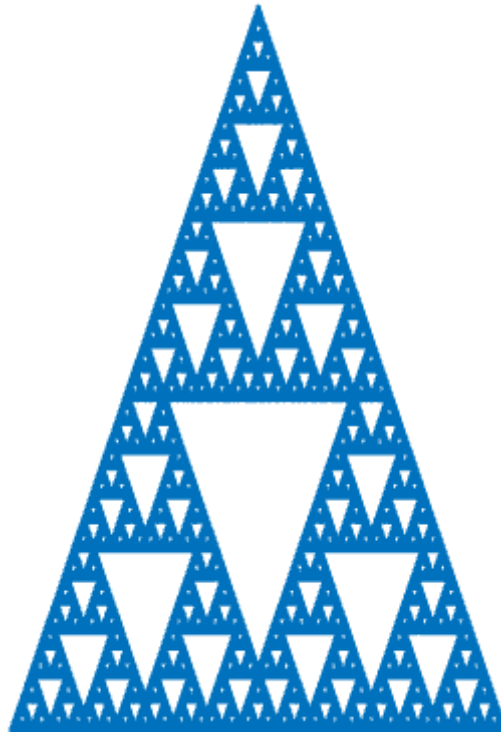


Figura 2.7: Triángulo de Sierpiński después de 100 iteraciones

Además del Triángulo de Sierpiński usual, podemos generar Triángulos de Sierpiński tomando diferentes parámetros  $\lambda$ , con  $\lambda \in (0, 1)$ . Al Triángulo de Sierpiński generado por cualquier parámetro  $\lambda$ , lo denotaremos como  $\mathcal{S}_\lambda$ . Definimos a *Triángulo de Sierpiński generalizado* al conjunto atractor que se genera cuando  $\lambda \in (0, 1)$ . Podemos definir a  $\mathcal{S}_\lambda$  a través

del siguiente procedimiento iterativo.

Consideremos el SIF dado por las funciones  $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definidas como:

$$f_i(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)p_i \text{ para } i = 0, 1, 2 \quad (2.9)$$

donde  $p_0 = (0, 0)$ ,  $p_1 = (1, 0)$ ,  $p_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ . Observemos que los puntos  $p_0, p_1, p_2$  forman un triángulo equilátero al cual denotaremos por  $(\Delta)$ . Luego para  $n \in \mathbb{N}$  definimos  $\Delta_n := \bigcup_{i=0}^2 f_i(\Delta_{n-1})$ .

Por el Teorema 1.3.10 sabemos que existe un único conjunto atractor para el sistema iterado de funciones 2.9, definido como

$$\mathcal{S}_\lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n, \quad (2.10)$$

donde el límite en la ecuación 2.10 se toma con respecto a la métrica de Hausdorff.

Podemos identificar cada sección obtenida en las iteraciones del Triángulo de Sierpiński mediante un *código*. Vamos a considerar el conjunto  $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ , y sobre este conjunto definimos la codificación. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $\Sigma^n := \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i \in \{0, 1, 2\}\}$ . Definimos,

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i, \Sigma^0 = \{\varepsilon\} \text{ donde } \varepsilon \text{ es el bloque vacío,}$$

el conjunto  $\Sigma^*$  es el conjunto de todos los posibles bloques finitos de palabras con elementos en  $\Sigma$ . Consideramos a  $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$  como el conjunto de todas las posibles sucesiones infinitas con elementos en  $\Sigma$ .

Consideremos a  $\{f_i\}_{i=0}^n$  el SIF dado por las funciones que definimos en 2.9,  $n \in \mathbb{N}$  y  $\varepsilon \in \Sigma^n$ , es decir,  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ . Definimos  $f_\varepsilon := f_{\varepsilon_n} \circ \dots \circ f_{\varepsilon_2} \circ f_{\varepsilon_1}$ . Es así que  $\varepsilon$  define una codificación sobre  $\Delta_n$ .

En el siguiente ejemplo se da un bosquejo de como se realiza una codificación en el triángulo de Sierpiński usual.

**Ejemplo 2.4.1.** Consideremos al Triángulo de Sierpiński usual  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$  y  $p_0 = (0, 0)$ ,  $p_1 = (1, 0)$  y  $p_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \in \Delta_0$ . Realizando la primera iteración tenemos:

$$f_0(p_0) = p_0 \in f_0(\Delta_0), \text{ es decir, } p_0 \text{ tiene como primer dígito en su codificación } 0,$$

$$f_1(p_1) = p_1 \in f_1(\Delta_0), \text{ es decir, } p_1 \text{ tiene como primer dígito en su codificación } 1,$$

$$f_2(p_2) = p_2 \in f_2(\Delta_0), \text{ es decir, } p_2 \text{ tiene como primer dígito en su codificación } 2.$$

Luego, en la segunda iteración veremos como son los dígitos respecto a cada triángulo:

El triángulo inferior con vértice  $p_0$ , se tiene

$$f_0(f_0(p_0)) = p_0, f_1(f_0(p_0)) \in f_1(\Delta_0) \text{ y } f_2(f_0(p_0)) \in f_2(\Delta_0)$$

los dos primeros dígitos  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  respectivamente.

El triángulo con vértice en  $p_1$ , se tiene

$$f_0(f_1(p_1)) = p_1, \quad f_1(f_1(p_1)) \in f_1(\Delta_0) \text{ y } f_2(f_1(p_1)) \in f_2(\Delta_0)$$

sus dos primeros dígitos son  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$  respectivamente. Y el triángulo superior, se tiene

$$f_0(f_2(p_2)) = p_2, \quad f_1(f_2(p_2)) \in f_1(\Delta_0) \text{ y } f_2(f_2(p_2)) \in f_2(\Delta_0)$$

sus dos primeros dígitos son  $(2, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 2)$ . Esto se puede observar en la figura 2.8.

Decimos que  $\varepsilon \in \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  es un *código* de  $x$  si

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\varepsilon_n}(p)$$

con  $\varepsilon^n = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  y  $p \in \Delta_0$ .

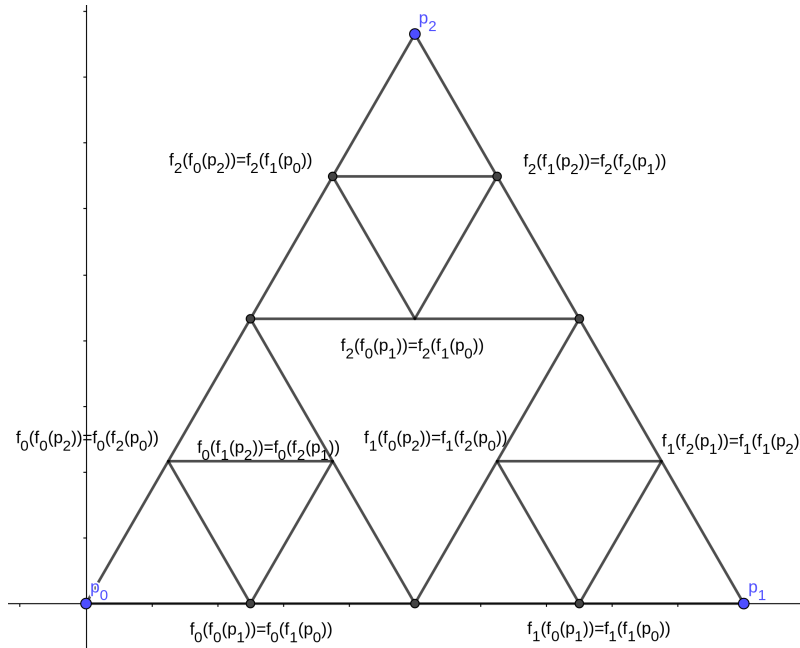


Figura 2.8: Primeros dos dígitos de  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$

**Proposición 2.4.2.** Sean  $n > 0$  y  $\{f_i\}_{i=0}^2$  un SIF definido en 2.9. Entonces  $\Delta_n = \bigcup_{\varepsilon \in \Sigma^n} f_\varepsilon(\Delta)$  de donde  $\Delta_n \subset \Delta_{n-1}$ .

*Demostración.* Para  $n = 1$  se tiene  $\Delta_1 = \bigcap_{i=0}^2 f_i(\Delta_0)$  es resultado es inmediato. Supongamos que se cumple para  $n$ , es decir,  $\Delta_n = \bigcup_{\varepsilon \in \Sigma^n} f_\varepsilon(\Delta)$ . Mostremos que se cumple para  $n + 1$ , es decir,  $\Delta_{n+1} = \bigcup_{\varepsilon \in \Sigma^{n+1}} f_\varepsilon(\Delta)$ .

Sea  $\varepsilon \in \Sigma^{n+1}$  y consideremos  $\varepsilon' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(\Delta) &= f_{\varepsilon_{n+1}} \circ f_{\varepsilon_n} \circ \dots \circ f_{\varepsilon_2} \circ f_{\varepsilon_1}(\Delta_0) \\ &= f_{\varepsilon_{n+1}}(f_{\varepsilon'}(\Delta)) \\ &= f_{\varepsilon_{n+1}}\left(\bigcup_{\varepsilon' \in \Sigma^n} f_{\varepsilon'}(\Delta)\right) \\ &= \bigcup_{\varepsilon \in \Sigma^{n+1}} f_\varepsilon(\Delta) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\Delta_n = \bigcup_{\varepsilon \in \Sigma^n} f_\varepsilon(\Delta)$  □

Se puede observar que si  $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$  la codificación de los puntos de  $\mathcal{S}_\lambda$  es esencialmente única. Sin embargo, si  $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$  la situación cambia. Como explicaremos intuitivamente en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.4.3.** Tomemos  $\lambda > \frac{1}{2}$ . En la imagen se muestra algunas superposiciones. Notemos

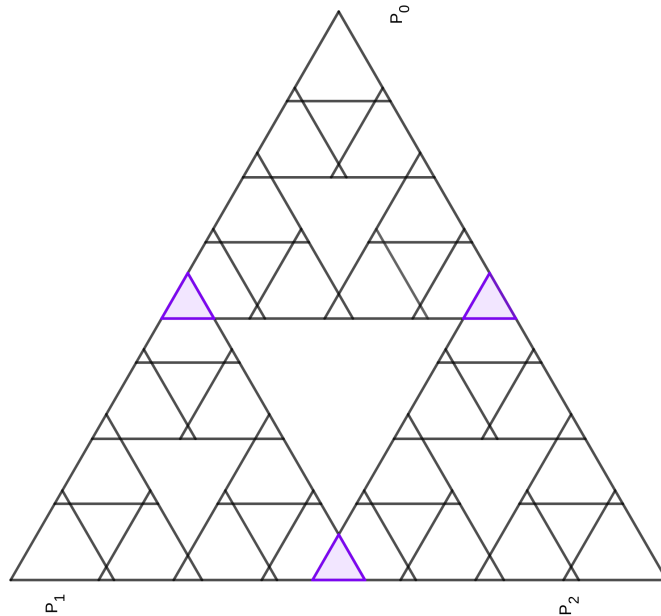


Figura 2.9: Los triángulos grises representan las superposiciones en la primera interacción y los vértices de los triángulos que son las superposiciones

que al hacer una codificación en las partes que existe una intersección se debe de elegir entre los valores que se encuentran. Es decir, si la intersección se da con el triángulo  $P_1$  y  $P_2$  se debe de elegir entre 1 y 2.

La condición del conjunto abierto que a continuación definiremos nos interesa puesto que existen parámetros  $\lambda \in (0, 1)$  para los cuales se hacen superposiciones importantes.

**Definición 2.4.4.** Sea  $\{f_i\}_{i=1}^n$  un SIF. Decimos que el SIF cumple la *condición del conjunto abierto* si existe un conjunto abierto no vacío, acotado y abierto  $O \subset X$  tal que  $\bigcup_{i=1}^n f_i(O) \subset O$  con  $f_i(O) \cap f_j(O) \neq \emptyset$

**Teorema 2.4.5.** Si  $\{f_i\}_{i=1}^n$  es un SIF donde  $f_i$  es una similitud para toda  $i = 1, \dots, n$ , que satisface la condición del conjunto abierto entonces

$$\dim_H(F) \leq s$$

donde  $F = \bigcup_{i=1}^n f_i$  es el atractor del SIF y  $s$  es el valor de similitud de  $\{f_i\}_{i=1}^n$

**Ejemplo 2.4.6.** Observemos la figura 2.10 del Conjunto de Cantor. Si tomamos un conjunto no vacío acotado y cerrado este sería un intervalo de radio  $3^{-k}$  con  $k = 1, 2, \dots, n$ . Veamos la primera iteración es decir,  $[0, \frac{1}{3}]$  y  $[\frac{2}{3}, 1]$ , Podemos definir 2 intervalos que cubran a cada intervalo, de tal forma que no se intercepten. Por lo tanto, en este caso se cumple la condición del conjunto abierto. De manera general podemos crear intervalos en la  $n$ -ésima iteración donde los intervalos tienen un radio muy pequeño de tal forma que la intersección es vacía.

Por lo tanto el conjunto de Cantor cumple la condición del conjunto abierto.

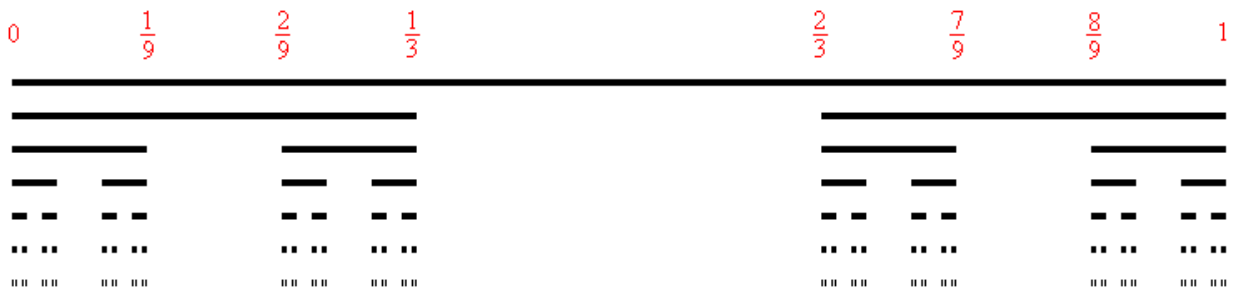


Figura 2.10: Conjunto de Cantor después de 6 iteraciones

En la Sección 1.3 vimos una forma de definir los vértices de un triángulo equilátero. Esto es, generamos a  $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$  mediante funciones de contracción. Sin embargo, a partir de este capítulo usaremos otras coordenadas para definir los vértices.

$$P_i = \frac{2}{3} \left( \cos \left( \frac{2\pi i}{3} \right), \sin \left( \frac{2\pi i}{3} \right) \right), \quad i = 0, 1, 2. \quad (2.11)$$

En el siguiente ejemplo veremos si se cumple o no la condición del conjunto abierto cuando  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda < \frac{1}{2}$  y  $\lambda > \frac{1}{2}$ .

**Proposición 2.4.7.** Sean  $O$  el interior de  $\Delta$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  y el SIF dado por  $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definido por  $f_i(x) = \lambda x + (1 - \lambda)P_i$  con  $P_i$  como en 2.11. Entonces  $\{f_i\}_{i=0}^2$  satisface la condición del conjunto abierto.



*Demostración.* Demostraremos por casos sobre  $\lambda$ .

1. Tomemos  $\lambda < \frac{1}{2}$ . Entonces:

$$f_i(O) \cap f_j(O) = \emptyset \text{ para } i, j = 0, 1, 2 \text{ y } i \neq j.$$

2. Sea  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Entonces:  $f_i(O) \cap f_j(O) = \emptyset$ . Dado que  $O$  es un conjunto abierto. Si a  $O$  se toma como cerrado, entonces  $f_i(O) \cap f_j(O)$  serian los puntos medios de cada triángulo.
3. Si  $\lambda > \frac{1}{2}$ , entonces:  $f_i(O) \cap f_j(O) \neq \emptyset$ . Notemos que estas intersecciones son triángulos, esto se muestra en la figura 2.11c. Por lo tanto, para  $\{f_i\}_{i=0}^2$  con valores de  $\lambda > \frac{1}{2}$  no cumple la condición del conjunto abierto.

□

El caso para  $\lambda > \frac{1}{2}$  se vera a profundidad en la Proposición 2.4.18.

Los casos demostrados en la Proposición 2.4.7 se presentan en las siguientes imágenes:

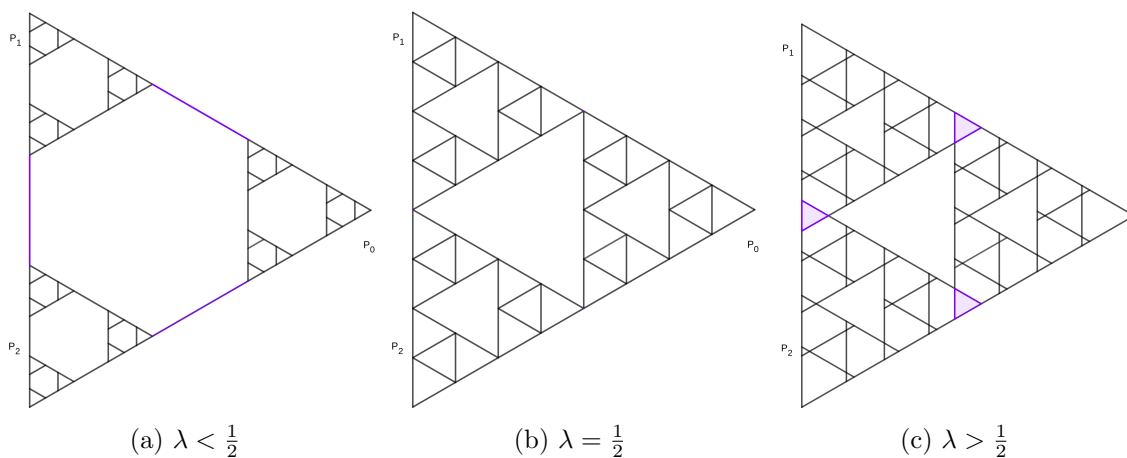


Figura 2.11: Parámetros de  $\lambda \in (0, 1)$  que representan donde se cumple la condición del conjunto abierto.

Notemos que en cada imagen existe una figura que se repite. En la figura 2.11a la forma que se obtiene en la primera iteración es un hexágono irregular, este es un agujero en el Triángulo de Sierpiński. Y en cada iteración se tiene la misma estructura de agujeros. Esto también se puede ver en las figuras 2.11b y 2.11c.

**Definición 2.4.8.** Llamamos a cualquier conjunto  $\Lambda$  que satisface  $f_\epsilon(\Lambda) = f_\epsilon(\Delta) \cap \Lambda$ , *totalmente autosimilar*.

Los agujeros se pueden definir de forma general como  $\Delta_n \setminus \Delta_{n+1}$ . La iteración  $n$  contiene  $3^n$  agujeros y cada uno esta rodeado de por 3 agujeros de  $(n+1)^{th}$  capas más pequeño de factor

$\frac{1}{2}$ . Para profundizar más respecto a los agujeros necesitamos cambiar de las coordenadas cartesianas a un sistema de coordenadas más conveniente.

Consideremos los puntos  $P_i$  denotaremos a  $[P_i, P_j]$  como los segmentos desde  $P_i$  a  $P_j$  con  $i \neq j$ . Tomemos un  $\bar{x} \in \Delta$  la podemos identificar con  $(x, y, z)$  donde  $x = d(\bar{x}, [P_1, P_2])$ ,  $y = d(\bar{x}, [P_0, P_2])$ ,  $z = d(\bar{x}, [P_0, P_1])$ ,  $[P_i, P_j]$  es el borde que contiene  $P_i, P_j$ . Enunciaremos algunos teoremas, lemas y proposiciones que nos interesan pero no incluirá las demostraciones, éstas se muestran en [1].

**Lema 2.4.9.** *En coordenadas baricéntricas  $f_0, f_1, f_2$  actúan como funciones lineales. De hecho*

$$f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1-\lambda & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

**Lema 2.4.10.** *Si  $\lambda \in [\frac{2}{3}, 1)$  entonces  $S_\lambda = \Delta$*

Una región interesante es cuando  $\lambda \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ . Sea  $H_0$  denota el agujero central, es decir,  $H_0 = \Delta \setminus \Delta_1$ , este es un triángulo equilátero “invertido” como se muestra en la figura (2.11c).

**Lema 2.4.11.** *Cada agujero es un subconjunto de  $\bigcup_{\varepsilon \in \Sigma^n} f_\varepsilon(H_0)$*

Consideremos

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_k = 0 \\ 0 & \text{si } \varepsilon_k \neq 0 \end{cases}, \quad b_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_k = 1 \\ 0 & \text{si } \varepsilon_k \neq 1 \end{cases}, \quad c_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_k = 2 \\ 0 & \text{si } \varepsilon_k \neq 2 \end{cases} \quad (2.12)$$

**Lema 2.4.12.** *Sea  $\varepsilon_k \in \Sigma^n$ , para  $k = 0, 1, \dots, n$ . Entonces,*

$$f_\varepsilon = \begin{pmatrix} (1 - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k + \lambda^n) & (1 - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k) & (1 - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k) \\ (1 - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} b_k \lambda^k) & (1 - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} b_k \lambda^k + \lambda^n) & (1 - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} b_k \lambda^k) \\ (1 - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda^k) & (1 - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k) & (1 - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda^k + \lambda^n) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

**Lema 2.4.13.** *Para cualquier  $\lambda \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$  existe un número infinito de agujeros*

**Definición 2.4.14.** Un agujero es radial si es de la forma  $f_i^n(H_0)$  con  $i = 0, 1, 2$ .

Es decir, solo serán agujeros generados por una sola función, no por una composición de funciones.

**Ejemplo 2.4.15.** Sea  $\lambda = \frac{1}{2}$ , con el SIF definido en el ejemplo 1.3.5. Al hacer 3 iteraciones obtenemos la imagen 2.12. Donde los triángulos con lados punteados representan a los triángulos radiales ya que son los generados por  $f_0, f_1$  o  $f_2$ . Y los demás están generados por  $f_{01}, f_{02}, f_{10}, f_{12}, f_{20}, f_{21}$ , etc.

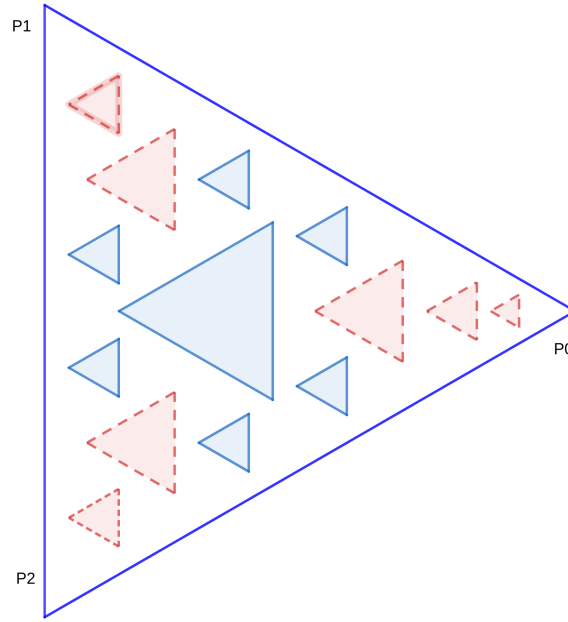


Figura 2.12: Triángulos Radiales

**Proposición 2.4.16.** Sea  $\lambda_* \approx 0,6478$  la raíz aproximada de  $x^3 - x^2 + x = \frac{1}{2}$ . Entonces,  $S_\lambda$  tiene interior no vacío si  $\lambda \in [\lambda_*, \frac{2}{3})$ . Y, además, cada agujero es radial. Figura 2.13

*Demostración.* Vamos a mostrar que cada agujero de nivel  $k$  es radial. Asumamos que es cierto para  $k < n$ ; por la simetría de nuestro modelo, es suficiente mostrar que  $f_1 f_0^n(H_0) \subset \Delta_{n+1}$ . Más precisamente, mostraremos que

$$f_1 f_0^n(H_0) \subset f_0 \Delta_n. \quad (2.14)$$

Por nuestra suposición  $\Delta_n$  contiene solo agujeros radiales, de donde (2.14) es consecuencia de de las siguientes relaciones

1.  $f_1 f_0^{n-1}(H_0) \subset f_0 \Delta$ ;
2.  $f_1 f_0^{n-1}(H_0) \cap f_0 f_1^{n-1}(H_0) = \emptyset$ .

Sea  $P$  el vértice de  $H_0$  con coordenadas baricentricas  $(2\lambda - 1, 1 - \lambda, 1 - \lambda)$ . Entonces 1 es efectivamente equivalente a  $f_1 f_0^{n-1}(P) \in f_0 \Delta$ , que por el Lema 2.4.12 conduce a

$$\lambda^{n+1} - \lambda^n + \lambda \geq \frac{1}{2}.$$

Por la monotonicidad de las raíz de ese polinomio con respecto a  $n$ , el peor de los escenarios es  $n = 2$ , lo cual es equivalente a  $\lambda \geq \lambda_*$ . Sea  $Q = (1 - \lambda, 2\lambda - 1, 1 - \lambda)$ . La condición 2 es equivalente a el hecho de que la coordenada  $x$  de  $f_1 f_0^{n-1}(P)$  es más grande que la coordenada  $x$  de  $f_0 f_1^{n-1}(Q)$ , por el Lema 2.4.12 se produce la desigualdad

$$\lambda (1 - 2\lambda^{n-1} + 2\lambda^n) > (1 - \lambda) (1 + \lambda^n)$$

lo cual es equivalente a  $3\lambda^{n+1} - 3\lambda^n + 2\lambda > 1$ . El peor escenario es cuando  $n = 3$ , donde la última desigualdad esta implícito por  $\lambda > 0,6421$ , es decir, vive dentro del rango.  $\square$

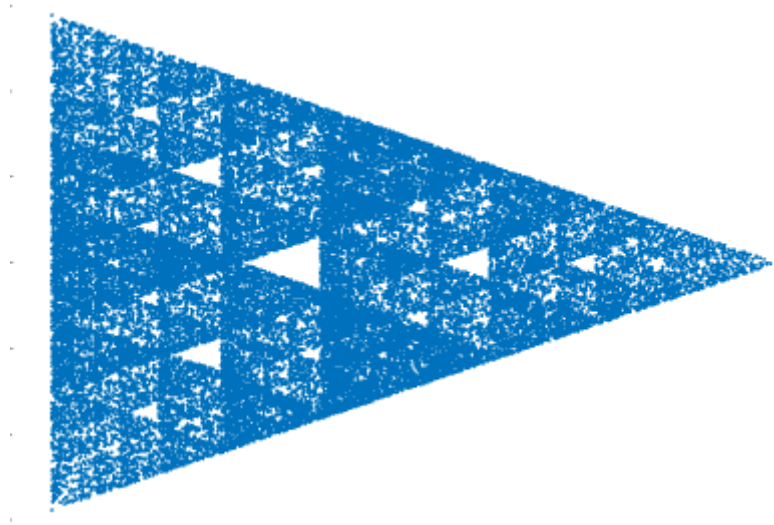


Figura 2.13: Triángulo de Sierpiński generado por  $\lambda_* \approx 0,6478$ . Solo se observan los agujeros radiales.

Analizando las figuras 2.14 y 2.15. En 2.14 podemos ver que el triángulo formado por los puntos  $f_0(P_1), f_0(P_2), P_0$  representa a  $f_0(\Delta)$  mientras  $f_1(P_0), f_1(P_2), P_1$  a  $f_1(\Delta)$ .

Ahora en la demostración de la Proposición 2.4.16 vimos 2 casos el primero esta representado por la figura 2.14, ya que  $f_1 f_0^{n-1}$  esta en  $f_0(\Delta)$ . Y el segundo caso se observa en 2.15. Al acercarnos podemos ver que la intersección es vacía.

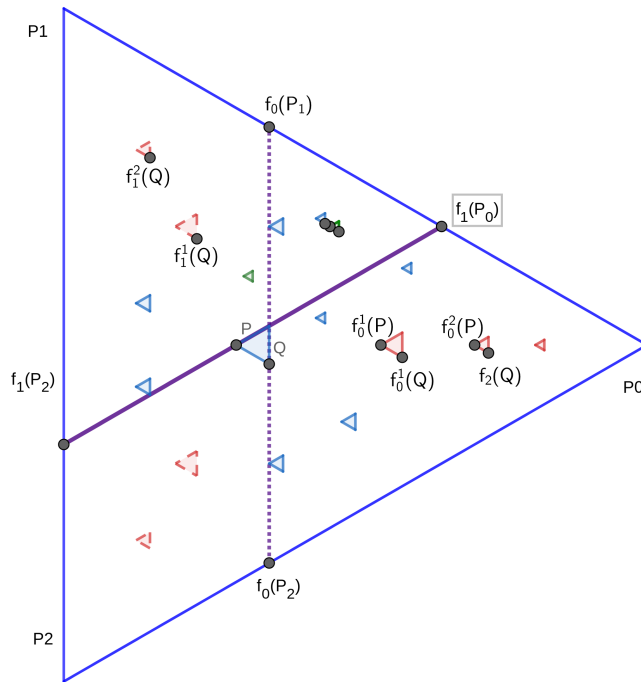


Figura 2.14: Triángulo de Sierpiński con  $\lambda = 0,6478$

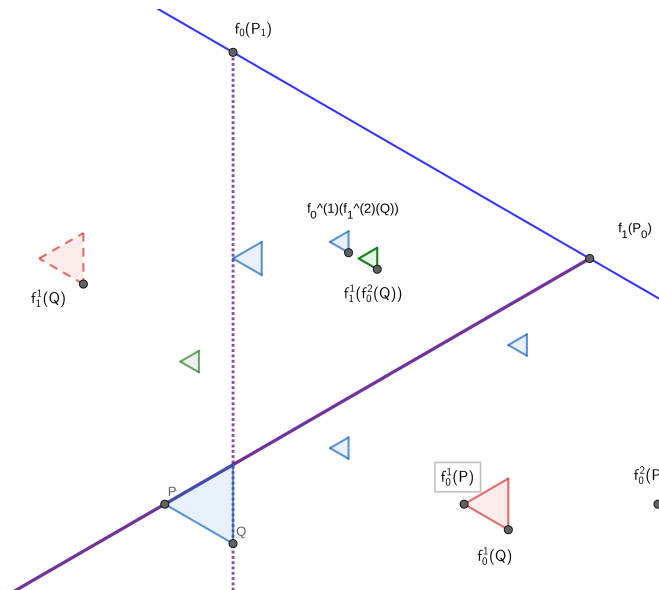


Figura 2.15: Acercamiento a el Triángulo de Sierpiński con  $\lambda = 0,6478$

**Proposición 2.4.17.**  $\lambda_*$  es el límite inferior exacto para los agujeros radiales

Para la demostración de la Proposición 2.4.17 se hará de manera geométrica. Usando los incisos 1 y 2.

*Demostración.* Sea  $\lambda < \lambda_*$ . Si  $\mathcal{S}_\lambda$  tiene agujeros radiales veamos que se cumpla lo siguiente:

1.  $f_1 f_0^{n-1}(H_0) \subset f_0(\Delta)$ ;

$$2. f_1 f_0^{n-1}(H_0) \cap f_0 f_1^{n-1}(H_0) = \emptyset.$$

Como podemos observa en la figura 2.14 se cumple que  $f_1 f_0^{n-1}(H_0) \subset f_0(\Delta)$  sin embargo al hacer  $f_1 f_0^{n-1}(H_0) \cap f_0 f_1^{n-1}(H_0)$  y al acercarse podemos ver que existe una intersección figura 2.15.

Así, podemos concluir que a partir de  $\lambda_*$  aparecerán agujeros radiales, es decir,  $\lambda_*$  es el límite inferior para caso radial.  $\square$

**Proposición 2.4.18.** Para  $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  el SIF no cumple la condición del conjunto abierto.

*Demostración.* Supongamos que existe un conjunto abierto  $\mathcal{O}$  que satisface la definición 2.4.4. Dado que  $f_j(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$  y las imágenes son disjuntas, tenemos

$$f_i f_j(\mathcal{O}) \cap f_{i'} f_{j'}(\mathcal{O}) = \emptyset, \text{ si } (i, j) \neq (i', j')$$

y por inducción,  $f_\varepsilon(\mathcal{O}) \cap f_{\varepsilon'}(\mathcal{O}) = \emptyset$  siempre que  $\varepsilon \neq \varepsilon'$ .

La misma afirmación es valida para cualquier subconjunto de  $\mathcal{O}$ ; eligiendo un triángulo abierto

$$D = \{x > x_0, y > y_0, z > z_0\} \text{ con } x_0 + y_0 + z_0 = 1.$$

De hecho, incluso podemos encontrar  $\varepsilon, \varepsilon'$  que no contiene 2 en su configuración. En efecto, por el Lema 2.4.12 todas las  $2^n$  imágenes de  $D$  están en el mismo nivel, es decir, de la forma  $\{x > \dots, y > \dots, z > \lambda^n z_0\}$ . Ya que el tamaño de cada triángulo es una  $C\lambda$  donde  $C$  es una constante, y  $\lambda > \frac{1}{2}$ , esto es posible.  $\square$

**Proposición 2.4.19.** Para  $\lambda \geq \frac{1}{2}$ ,  $\partial\Delta \subset S_\lambda$ . Consecuentemente, para cualquier  $\varepsilon \in \Sigma^n$ ,  $\partial f_\varepsilon(\Delta) \subset S_\lambda$

*Demostración.* En coordenadas baricéntricas,  $\partial\Delta = \{x = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{z = 0\}$ .

En vista de la simetría, es suficiente mostrar que  $K = \{z = 0\} \subset S_\lambda$ . Cualquier punto de  $K$  es de la forma  $(x, 1-x, 0)$  con  $x \in [0, 1]$ . Nuestra afirmación se sigue del Lema 2.4.12 y del hecho que cualquier  $x \in [0, 1]$  tiene una expansión codiciosa en disminuir las potencias de  $\lambda$ , es decir,  $x = (1-\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda^k$ . Para  $y$ , tomando  $b_k = 1 - a_k$ . Para la segunda afirmación, dado que  $S_\lambda$  es invariante,  $f_i(S_\lambda) \subset S_\lambda$  de donde  $f_\varepsilon(S_\lambda) \subset S_\lambda$  para cada  $\varepsilon$ . Ahora, nuestra afirmación se sigue de  $\partial f_\varepsilon(\Delta) = f_\varepsilon(\partial\Delta)$   $\square$

## Capítulo 3

# Triángulo de Sierpiński con valores especiales

En este capítulo, veremos valores de  $\lambda$ 's especiales. Redefiniremos algunos conceptos importantes vistos en el Capítulo 2. Por ejemplo, mostraremos que para valores especiales de  $\lambda$ , se tiene que  $\mathcal{S}_\lambda$  auto-similar.

Al final del capítulo, se muestra una tabla donde se representan la dimensión de Hausdorff para los valores de  $\lambda \in (0, 1)$  y valores  $\omega_m$  llamados números de multinacci que a continuación definimos.

**Definición 3.0.1.** Sea  $\omega_m > 0$ . Decimos que  $\omega_m \in (\frac{1}{2}, 1)$  es un *número de multinacci* si es la solución más pequeña positiva de  $x^m + x^{m-1} + \dots + x = 1$ ,  $m \geq 2$  para todo  $m$ .

Podemos ver el Triángulo de Sierpiński generado por el primer número de multinacci  $\omega_2$

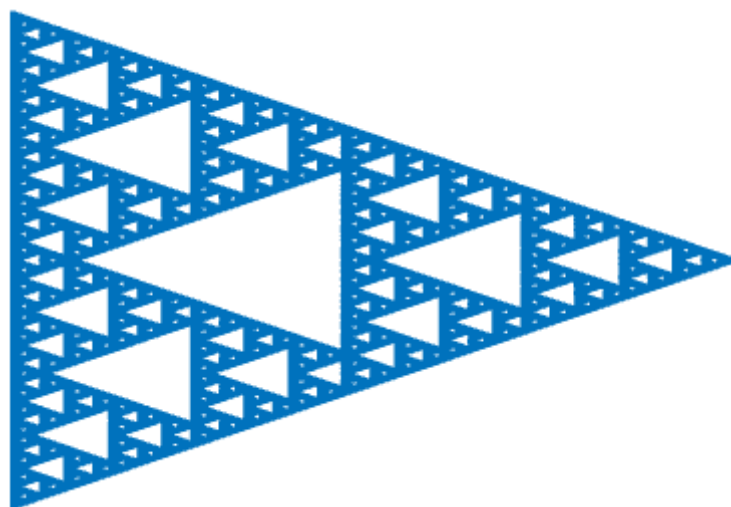


Figura 3.1: Sierpiński  $\omega_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

**Proposición 3.0.2.** El conjunto  $f_\varepsilon(H_0)$  es un agujero para cualquier  $\varepsilon \in \Sigma^n$

La demostración de la Proposición 3.0.2 se encuentra en [1].

**Teorema 3.0.3.** *El conjunto  $\mathcal{S}_{\omega_m}$  es totalmente auto-similar en el sentido de la definición (2.4.8), es decir,*

$$f_\varepsilon(\mathcal{S}_{\omega_m}) = f_\varepsilon(\Delta) \cap \mathcal{S}_{\omega_m}$$

para cualquier  $f_\varepsilon \in \Sigma^n$

*Demostración.* Sea  $H_n = \bigcup_{\varepsilon \in \Sigma^n} (f_\varepsilon(H_0))$ . Dado  $H_k = \bigcup_{\varepsilon \in \Sigma^n} f_\varepsilon(H_k)$ , tenemos  $f_\varepsilon(H_k) \subset H_{n+k}$ . Además,  $f_\varepsilon(H_{k+1}) \subset f_\varepsilon(\Delta)$ , de donde  $f_\varepsilon(H_k) \subset H_{n+k} \cap f_\varepsilon(\Delta)$ . Por otra parte, por la Proposición 2.4.19, ya sea  $f_\varepsilon(H_0) \cap f_{\varepsilon'}(H_0) = \emptyset$  o  $f_\varepsilon(H_0) = f_{\varepsilon'}(H_0) = \emptyset$  para  $\varepsilon' \in \Sigma^{n+k}$ . Por lo tanto los elementos de  $H_{n+k}$  son disjuntos, tenemos

$$f_\varepsilon(H_k) = f_\varepsilon(\Delta) \cap H_{n+k}.$$

Hemos probado en la Proposición 2.4.19;  $H_{n+k} \cap \Delta_{n+k+1} = \emptyset$ ,  $f_\varepsilon(\Delta_k) = f_\varepsilon(\Delta) \cap \Delta_{n+k+1}$ . La afirmación ahora se sigue del hecho de que  $\Delta_k \rightarrow \mathcal{S}_{\omega_m}$  en la métrica de Hausdorff y  $f_\varepsilon$  es continua.  $\square$

**Teorema 3.0.4.** *La dimensión de Hausdorff del conjunto invariante  $\mathcal{S}_{\omega_m}$  es igual a dimensión por cajas, y esta dado por:*

$$\dim_H(\mathcal{S}_{\omega_m}) = \dim_B(\mathcal{S}_{\omega_m}) = \frac{\log \tau_m}{\log \omega_m} \quad (3.1)$$

donde  $\tau$  es la raíz positiva más pequeña de el polinomio

$$3z^{m+1} - 3z + 1.$$

**Lema 3.0.5.** *Para cualquier entero  $m \geq 2$ , sea  $\tau \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  la raíz positiva más pequeña de  $3t^{m+1} - 3t + 1$  y  $\sigma_m \in (0, 1)$  la raíz positiva más pequeña de  $2t^m - 3t + 1$ . Entonces*

$$\frac{1}{3} < \tau_m < \sigma_m < \frac{2}{3}$$

por consiguiente  $\frac{\log \tau_m}{\log \sigma_m} > \frac{\log \sigma_m}{\log \omega_m} > 1$ .

$$\text{Además, } \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = \frac{1}{3}$$

*Demostración.* Sea  $p_m = 3t^{m+1} - 3t + 1$  y  $q_m = 2t^m - 3t + 1$ . Notemos que las derivadas de  $p_m$  y  $q_m$  son monótonas en el intervalo  $(0, 1)$ , así que cada uno tiene al menos dos raíces en el intervalo. Observemos que  $p_m(\omega_m) < 0$  y  $q_m(\omega_m) < 0$ . Dado que  $p_m(1) = 1$ ,  $q_m(1) = 0$ ,  $p_m(\frac{1}{3}) > 0$  y  $q_m(\frac{1}{3}) > 0$ , se sigue que

$$\frac{1}{3} < \tau_m < \omega_m \text{ y } \frac{1}{3} < \sigma_m < \omega_m$$

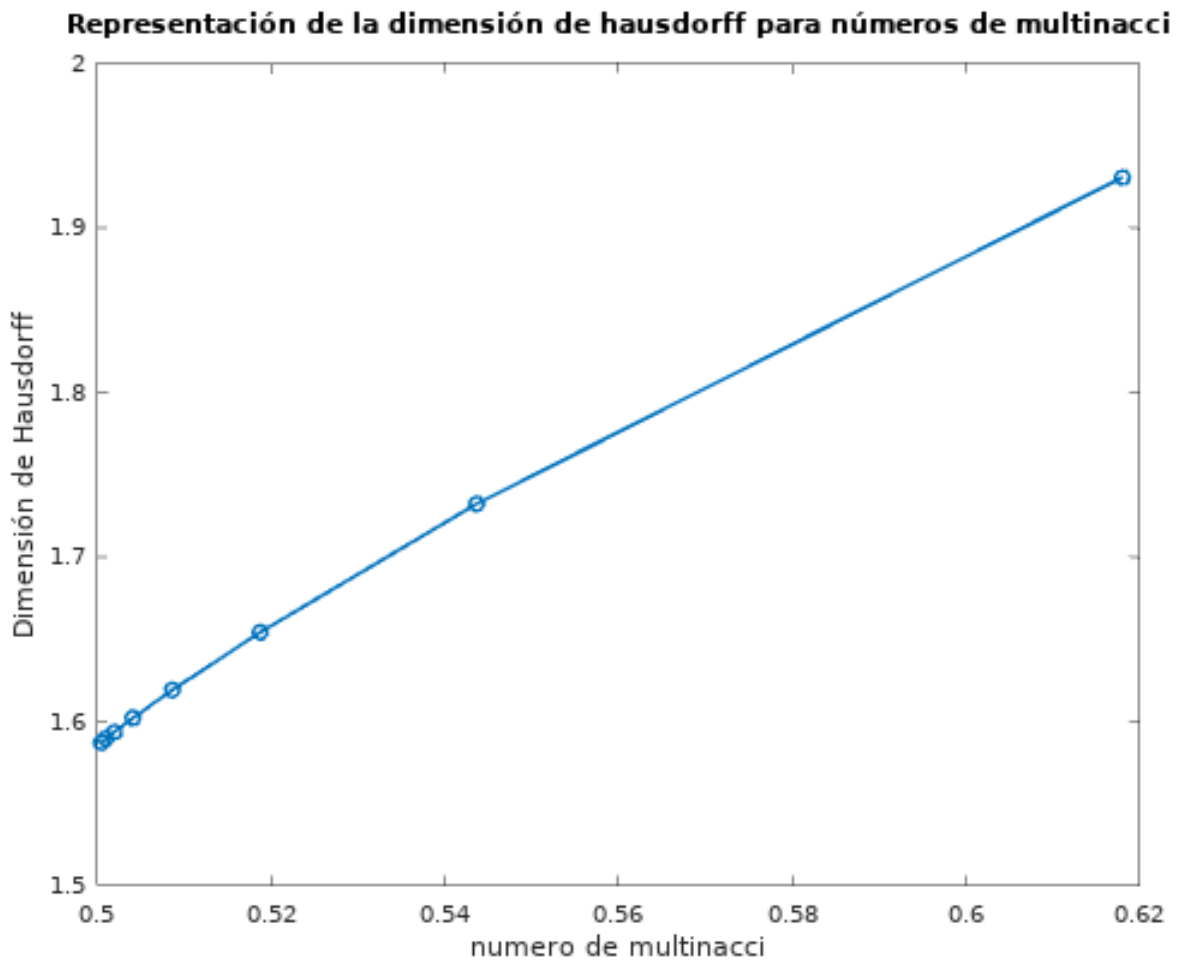


Finalmente,

$$p_m(\sigma_m) = 3\sigma_m \left( \frac{3\sigma_m}{2} - 1 \right) - 3\sigma_m + 1 = \frac{1}{2}(3\sigma_m - 1)(3\sigma_m - 2) < 0$$

Así que,  $\sigma_m > \tau_m$ . El límite queda claro a partir de la definición □

**Ejemplo 3.0.6.** Usando el Teorema 3.0.4. Podemos generar una gráfica representando, los números de multinacci y la dimensión de Hausdorff. Esto para ver como crece o decrece la dimensión de Hausdorff respecto a estos números.



Por otro lado, podemos ver los traslapes que existen cuando se toma un valor  $\lambda$  que se encuentra en  $\left(0,6, \frac{2}{3}\right)$  en la Figura 3.2.

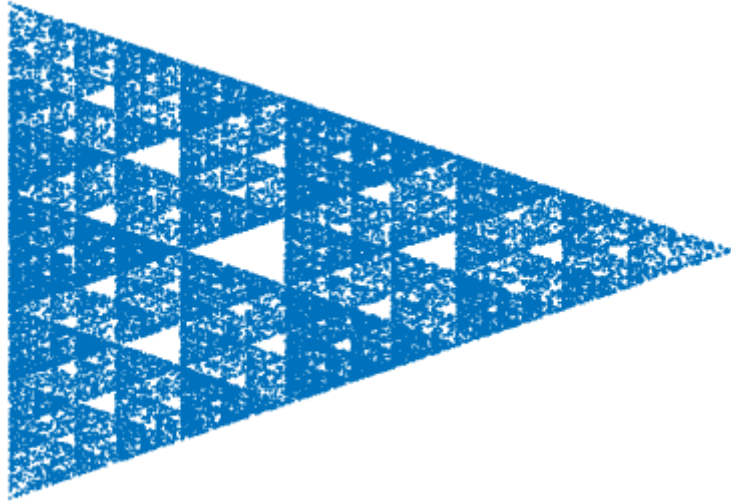


Figura 3.2: Triángulo de Sierpiński cuando  $\lambda = 0,62$

**Definición 3.0.7.** A cualquier  $\varepsilon \in \Sigma^\infty$  le corresponde un único punto

$$x_\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\varepsilon_0} \circ \dots \circ f_{\varepsilon_n}(x_0) \in \mathcal{S}_\lambda.$$

Este límite no depende de la elección de  $x_0$ . Llamamos a  $\varepsilon$  una dirección  $x_\varepsilon$ .

Notemos que dado un  $x \in \mathcal{S}_\lambda$  puede tener más de una dirección.

**Definición 3.0.8.** Sea  $\mathcal{U}_\lambda$  el conjunto de unicidad, es decir,

$$\mathcal{U}_\lambda = \{x \in \Delta : \text{existe un único } (\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots) \text{ tal que } x = x_\varepsilon\}$$

En otras palabras  $\mathcal{U}_\lambda$  es el conjunto de puntos  $x \in \Sigma$ , cada uno de los cuales tienen una dirección única.

**Teorema 3.0.9.** *El conjunto de unicidad,  $\mathcal{U}_{\omega_m}$ , es un conjunto auto-similar con la dimensión de Hausdorff.*

$$\dim_H(\mathcal{U}_{\omega_m}) = \frac{\log \sigma_m}{\omega_m},$$

donde  $\omega_m$  es definido en el Lema 3.0.5, en particular  $\sigma_2 = \frac{1}{2}$ .

Para realizar esta demostración, vamos a descomponer a  $\Lambda$  en 2 conjuntos disjuntos (por la Proposición 2.3.1);  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{U}_{\omega_m}$  de tal forma que  $\Lambda = \mathcal{A} \cup \mathcal{U}_{\omega_m}$ . La demostración se hará en

dos casos, cuando  $m = 2$  y  $m \leq 3$ . Además usaremos la geometría del Triángulo de Sierpiński para estos casos. Luego utilizaremos la siguiente propiedad

$$\dim_H(\Lambda) = \max(\dim_H(\mathcal{A}), \dim_H(\mathcal{U}_{\omega_m})).$$

Y se realizará calculando lo siguiente:

- la  $\dim_H(\mathcal{U})$

$$\dim_H(\mathcal{U}) = \frac{\log \sigma_m}{\log \omega_m};$$

- la  $\dim_H(\mathcal{A})$

$$\dim_H(\mathcal{A}) = \frac{\log \tau_m}{\log \omega_m};$$

$$\dim_H(\mathcal{A}) = \frac{\log \tau_m}{\log \omega_m} > \frac{\log \sigma_m}{\log \omega_m} = \dim_H(\mathcal{U}).$$

*Demostración.* 1.  $m = 2$

Observemos la figura 3.3 la forma de desarrollar esta figura es de la siguiente manera: comencemos a quitar del el agujero central (abierto)  $H_0$  que es un triángulo equilátero

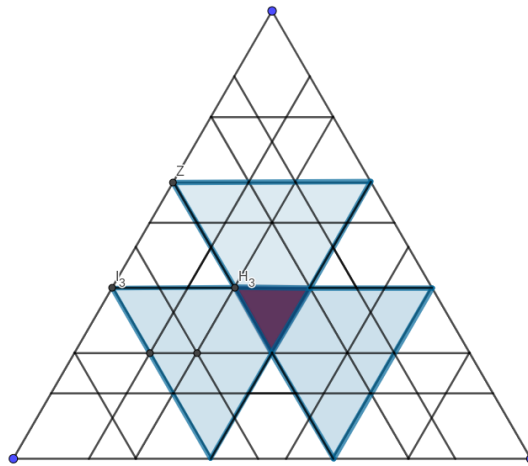


Figura 3.3: Geometría del Triángulo de Sierpiński  $m = 2$

ro, los 3 triángulos equiláteros (cerrados) de lado  $\omega_2^2$  que son las imágenes de las tres  $f_j^2$  donde  $j = 0, 1, 2$  y los tres triángulos más pequeños son las imágenes de  $f_i f_j^2 = f_j f_i^2$ . Notemos que esto sería cuando se aplica la tercera iteración que en la figura se representa por  $H_3, I_3$ . Esto deja tres trapecios cuya unión se denota como  $T_1$ . Definimos a  $F_k = f_i f_j^2$ , que representa la composición de dos funciones con  $i, j, k$  distintos. En la figura 3.3 tenemos 3 trapecios, que se descomponen en; un agujero, un triángulo equilátero de lado  $\omega_2^4$  y 2 trapecios pequeños de factor  $\omega_2$ . Los tres triángulos equiláteros, están representados por:  $f_1 f_0 f_2^2 = f_1 F_1$  que denota la parte inferior izquierda del trapecio,  $f_2 F_2$ ; inferior derecho y  $f_0 F_0$  el trapecio superior.

Sea  $\mathcal{A}_{\omega_2}$  el atractor de un SIF infinito definido por

$$\{f_j^2, F_j, f_j F_j, f_j f_i F_j, f_k f_j, f_i F_i, \dots\}.$$

Donde el término general es  $f_{j_1} f_{j_2} \dots f_{j_n} F_j$ . Por la teoría desarrollada por Mauldin and Urbański [5], en el SIF finito la dimensión de Hausdorff  $s$ , del atractor  $\mathcal{A}_{\omega_2}$  es igual al de su similitud dado por  $\omega_2^s = \tau$ . Puesto que este SIF esta contenido en el SIF original, se tiene,  $\mathcal{A}_{\omega_2} \subset S$ .

Sea  $\mathcal{U}$  el límite de la sucesión de uniones del trapecio. Así,  $\mathcal{U}^n$  es la unión de los  $3(2^{n-1})$  trapecios. Entonces  $\mathcal{U}^{n+1} \subset \mathcal{U}^n$  y  $\mathcal{U}' = \bigcap_{n>0} \mathcal{U}^n$ .

$\mathcal{U}'$  es un conjunto de cantor auto-similar con

$$\dim_H(\mathcal{U}') = \frac{-\log 2}{\log \omega_2}$$

Afirmamos que  $\mathcal{U}' \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^2 f_k^{2n}(\mathcal{U}') = \mathcal{U}$ .

En vista de la relación de  $f_i f_j^2 = f_j f_i^2$ , cada  $\mathbf{x} \in S$  que tiene varias direcciones debe de tener  $\varepsilon_{j-1} \neq \varepsilon_j$  para algún  $j \geq 1$ . Esta unión es el conjunto de  $\mathbf{x}'s$ , cuyas direcciones pueden tener símbolo iguales solo al inicio. Por lo tanto es el conjunto de unicidad. Para verificar que  $S = \mathcal{A} \cup \mathcal{U} \neq \emptyset$  del SIF infinito. Sea  $x \in \mathcal{A}$  si y solo si  $x = x_\varepsilon$  para algún  $\varepsilon$ , existen dos índices consecutivos que coinciden y no coinciden con el anterior, es decir,  $\mathcal{A} \cup \mathcal{U} \neq \emptyset$ . Por otro lado, cualquier punto en  $S$  con mas de una dirección estan en  $\mathcal{A}$ . Entonces  $S \setminus \mathcal{A}$  consiste de los puntos con una única dirección y expresión.

2.  $m \geq 3$ . Al igual que en caso anterior, empezaremos por explicar como generar el conjunto  $\mathcal{A}$ . Los hexágonos en la Figura 3.4 tienen lados de tamaño

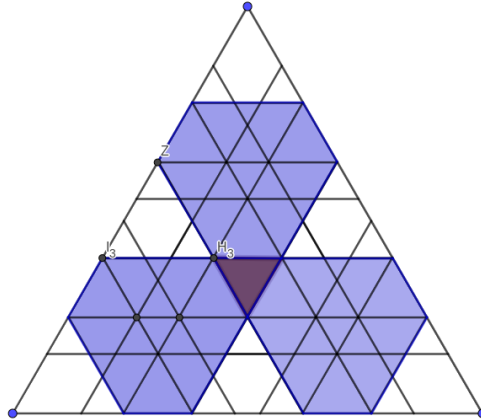


Figura 3.4: Geometría del Triángulo de Sierpiński  $m = 3$

$$\omega_m^m, (1 - \omega_m - \omega_m^m), \omega_m^{m+1}, (2 - 3\omega_m), \omega_m^{m+1} \text{ y } (1 - \omega_m - \omega_m^m).$$

Cada uno de los  $\omega$ -hexágonos de tamaño  $\omega_m^k$  pueden ser descompuestos en la siguiente manera:  $m - 1$  agujeros de varios tamaños bajo la línea de simetría,  $(3m - 5)$  triángulos equiláteros, 3 de cada tamaño  $\omega_m^{k+2}, \omega_m^{k+3}, \dots, \omega_m^{k+m-1}$  y uno de tamaño  $\omega_m^{k+m}$ ,  $2(m - 1)$   $\omega$ -hexágonos, 2 de cada tamaño  $\omega_m^{k+1}, \omega_m^{k+2}, \dots, \omega_m^{k+m-1}$ .

El triángulo equilátero que se produce con la descomposición original bajo ciertas similitudes que surgen por  $\{f_0, f_1, f_2\}$ .

Este subsistema define un SIF numerable que satisface la condición del conjunto abierto, lo que permite calcular el atractor correspondiente  $\mathcal{A}_{\omega_m}$ .

Sea  $h_k$  el número de hexágonos de tamaño  $\omega_m^k$ . Entonces,  $h_k = 0$  para  $k < m$ ,  $h_m = 3$  y  $h_k = 2(h_{k-m+1} + \dots + h_{k-1})$  para  $k > m$ .

Sea  $Q = \sum_{k=1}^{\infty} h_k t^k$ . Entonces,

$$Q = 3t^m + 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{r=1}^{m-1} h_{k-r} t^k = 3t^m + 2Q \sum_{r=1}^{m-1} t^r.$$

$$\text{Si } |t| < r_m, \quad Q = \frac{3t^m(1-t)}{1-3t+2t^m}.$$

Sea  $P = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$ . Entonces,

$$P = 3t^m + 3t^{m+1} + t^m Q + 3(t^2 + \dots + t^{m-1})Q = 3t^m \frac{1-2t+t^{m+1}}{1-3t+2t^m}.$$

La dimensión de Hausdorff del SIF infinito es la formula

$$s = \frac{\log \tau_m}{\log \omega_m},$$

$\tau$  es el supremo de todo  $\mathbf{x}$  tal que  $\sum_k p_k x^k < 1$ , es decir, la única raíz positiva de  $(3\tau^{m+1} - 3\tau + 1)\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C} = 1 + t + \dots + t^m$ .

$$\dim_H(\mathcal{A}_{\omega_m}) = \frac{\log \tau_m}{\log \omega_m}$$

Para mostrar  $\dim_H(\mathcal{A}_{\omega_m}) = \dim_H(\mathcal{S}_{\omega_m})$ .

Basta evaluar el crecimiento de el número de hexágonos. El crecimiento de los coeficientes es asintóticamente  $n_k \approx \sigma_m^k$ , donde  $\sigma_m$  es la raíz positiva más pequeña del crecimiento de  $Q$ . Por lo tanto,

$$\dim_H(\mathcal{U}_{\omega_m}) = \frac{\log \sigma_m}{\log \omega} < \frac{\log \tau}{\log \omega_m} = \dim_H(\mathcal{A}_{\omega_m}).$$

□

Podemos concluir con la siguiente tabla que muestra la dimensión de Hausdorff respecto a valores  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $\omega_m \in (\frac{1}{2}, 1)$  y  $\mathcal{S}_\lambda$ ,  $\mathcal{S}_{\omega_m}$ .

Valor	dimensión de Hausdorff
$\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\dim_H(\mathcal{S}_\lambda) > 0$
$\lambda = \frac{1}{2}$	$\dim_H(\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}) = \frac{\log 2}{\log 3}$
$\omega_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\dim_H(\mathcal{S}_{\omega_2}) = 1,9306$
$\omega_3$	$\dim_H(\mathcal{S}_{\omega_3}) = 1,7322$
Número de multinacci $\omega_m$	$\dim_H(\mathcal{S}_{\omega_m}) = \frac{\log \tau_m}{\log \omega_m}$
$\lambda \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$	$\dim_H(\mathcal{S}_\lambda) = 2$

Tabla 3.1: Dimensión de Hausdorff para  $\lambda \in (0, 1)$  y números de multinacci  $\omega_m \in (\frac{1}{2}, 1)$ .

A lo largo de este trabajo, mostramos como calcular la dimensión de Hausdorff para valores de los parámetro  $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ ,  $\omega_m$  un número de multinacci (figura 3.5), y  $\lambda \in (\frac{2}{3}, 1)$  (figura 3.6). Si embargo, aun no se cubre todo el intervalo  $[0, 1]$ . Observemos la figura 3.6,

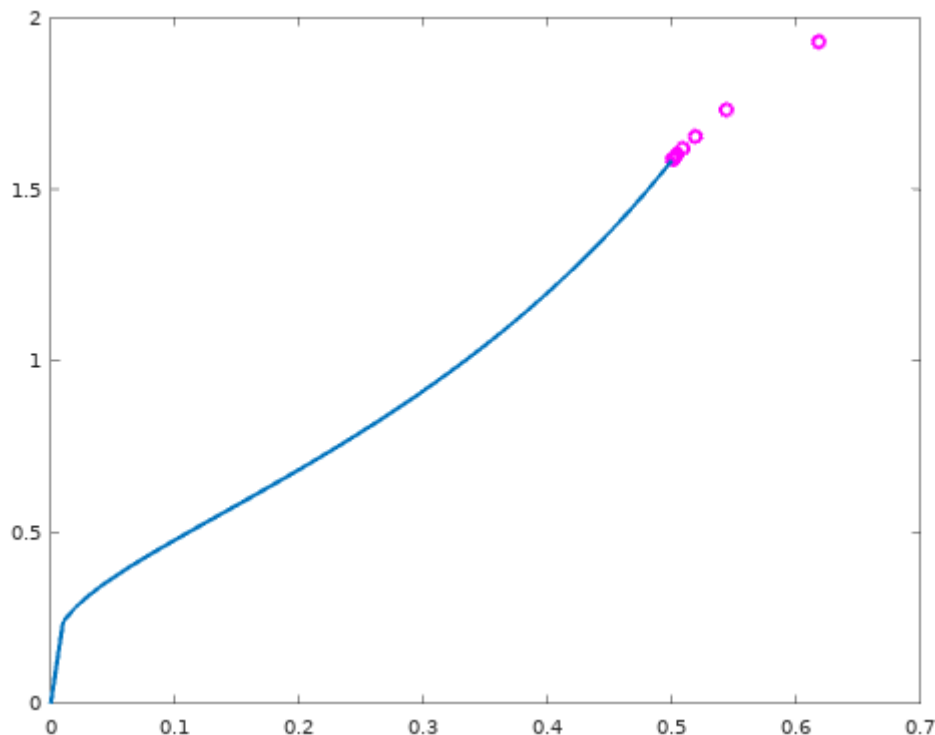


Figura 3.5: Dimensión de Hausdorff para  $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$  (línea continua), números de multinacci (círculos) y  $\lambda \in (\frac{2}{3}, 1)$  (línea con \*).

esto representa la dimensión de Hausdorff para 2 números de multinacci  $\omega_2$  y  $\omega_3$ , además de representa la dimensión de Hausdorff para  $\lambda \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$ . Existe un espacio donde no se conoce la dimensión como se puede observar; es un problema abierto. No obstante hay investigaciones que están ahondado en como calcular las dimensiones en el espacio que nos falta.

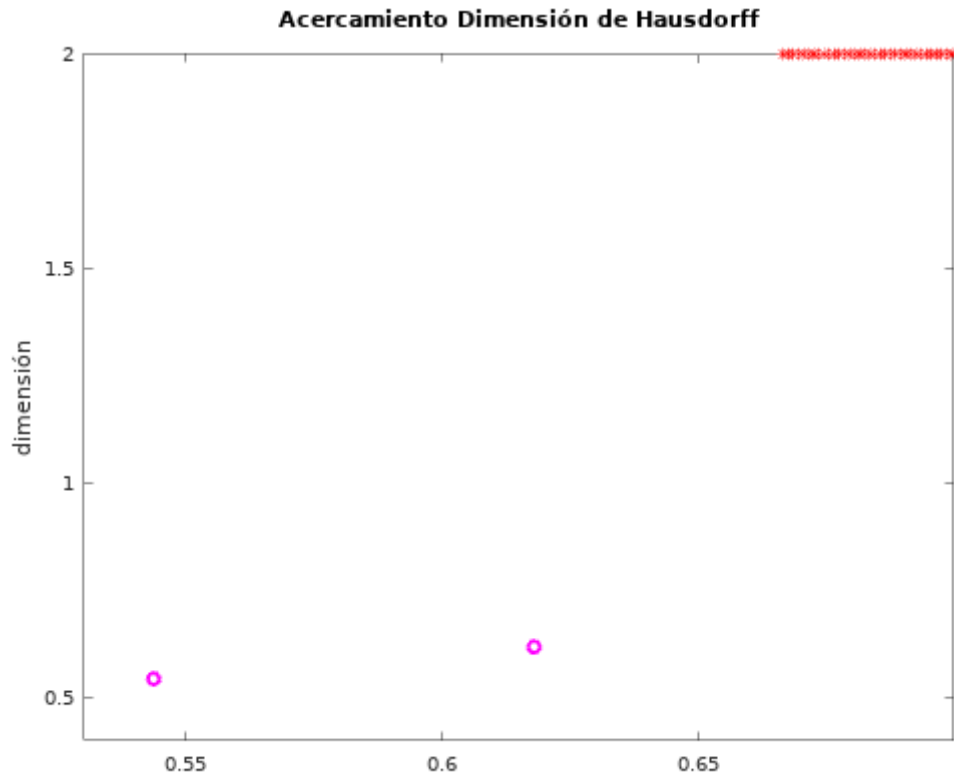


Figura 3.6: Dimensión de Hausdorff para  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  (círculos) y  $\lambda \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$  (línea con \*).

# Bibliografía

- [1] Dave Broomhead, James Montaldi y Nikita Sidorov. “Golden gaskets: variations on the Sierpiński sieve”. En: *Nonlinearity* 17.4 (2004), págs. 1455-1480. ISSN: 0951-7715. DOI: 10.1088/0951-7715/17/4/017. URL: <https://doi.org/10.1088/0951-7715/17/4/017>.
- [2] Gerald Edgar. *Measure, topology, and fractal geometry*. Second. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2008, págs. xvi+268. ISBN: 978-0-387-74748-4. DOI: 10.1007/978-0-387-74749-1. URL: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-74749-1>.
- [3] Kenneth Falconer. *Fractal geometry*. Third. Mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2014, págs. xxx+368. ISBN: 978-1-119-94239-9.
- [4] Fernando Galaz Fontes. *Elementos de Análisis Funcional*. 1.<sup>a</sup> ed. Centro de Investigación de Matemática, 2006.
- [5] R. Daniel Mauldin y Mariusz Urbański. “Dimensions and Measures in Infinite Iterated Function Systems”. En: *Proceedings of the London Mathematical Society* s3-73.1 (1996), págs. 105-154.
- [6] Clapp Mónica. *Análisis Matemático*. Third. Colección papirhos, 2019. ISBN: 978-6073021388.
- [7] Yakov Pesin, Vaughn Climenhaga. *Lecture on fractal geometry and dynamical systems*. Student mathematical library, 2006.